

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

серия основана в 1996 г.



Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Российская экономическая академия им. Г.В. Плеханова»
(ГОУ ВПО «РЭА им. Г.В. Плеханова»)

Л.Ф. ПЕТРОВ

МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЭКОНОМИКИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

*Рекомендовано
Учебно-методическим объединением вузов России
по образованию в области экономики
и экономической теории в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению 080100 «Экономика»
и экономическим специальностям*

Москва
ИНФРА-М
2010

УДК 330.115(075.8)
ББК 65в6я73
ПЗ0



Учебное пособие подготовлено в ходе реализации
Инновационной образовательной программы ГОУ ВПО РЭА им. Г.В. Плеханова
«Развитие инновационных клиентоориентированных образовательных программ
на основе когнитивных технологий и реинжиниринга вуза»
в рамках приоритетного национального проекта «ОБРАЗОВАНИЕ»

Петров Л.Ф.
ПЗ0 Методы динамического анализа экономики: Учеб. пособие. — М.:
ИНФРА-М, 2010. — 239 с. — (Высшее образование).

ISBN 978-5-16-003954-1

Рассматриваются модели экономической динамики, построенные с использованием аппарата обыкновенных дифференциальных уравнений; нелинейные модели, которые могут адекватно отразить разнообразные динамические процессы в реальных системах, включая предкризисные, кризисные и посткризисные явления; методы исследования динамических процессов, ориентированные на анализ переходных и периодических процессов в разнообразных, в том числе и существенно нелинейных, динамических системах. Обсуждается применение методологии синергетики, эконофизики к анализу динамики экономических и социально-экономических систем.

Для студентов старших курсов и магистратуры, аспирантов, научных работников, преподавателей по направлениям «Экономика», «Менеджмент», «Прикладная информатика в экономике», «Математические методы в экономике».

ББК 65в6я73

ISBN 978-5-16-003954-1

© Петров Л.Ф., 2010

ВВЕДЕНИЕ

В условиях ускорения научно-технического прогресса и интенсификации взаимодействия между элементами общественной системы все более значимую роль в формировании тенденций и закономерностей экономических процессов играет фактор времени. Это обуславливает необходимость разработки и использования в прогнозировании и управлении этими процессами моделей особого типа, которые в научной литературе получили название «динамические модели». Эти модели отражают характер временных изменений в рассматриваемых системах, включая происходящие в них структурные сдвиги, особенности и интенсивность взаимодействия между их элементами. К ним относятся различные виды моделей, использующие аппарат теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В учебном пособии рассматриваются вопросы построения, анализа свойств этих моделей и раскрываются особенности их использования в исследованиях закономерностей широкого круга экономических и бизнес-процессов.

Пособие содержит два раздела.

Первый раздел посвящен моделям экономической динамики, построенным на основе положений теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Обосновывается значительная роль фактора времени в экономике и экономических процессах, рассматриваются возможные варианты зависимостей экономических показателей от времени, включая зависимости, вытекающие из теории экономических циклов. В материалы включены как классические, так и современные нелинейные модели экономической динамики. Проводится систематический анализ области применимости моделей в зависимости от учета нелинейных факторов. Выделяются модели двух основных видов динамических процессов в экономике — переходных процессов и экономических циклов. Особое внимание обращено на учет нелинейных эффектов в моделях экономической динамики, что позволяет анализировать закономерности развития реальных социально-экономических процессов в сложных условиях, обуславливающих потерю устойчивости экономических систем, возникновение кризисов, хаос, циклическое развитие, зарождение и развитие новых состояний.

Второй раздел посвящен систематическому изложению методов анализа динамических процессов. Особое внимание уделено методам исследования квазилинейных, существенно нелинейных моделей экономической динамики, базирующихся на теории обыкновенных

дифференциальных уравнений. Рассматриваются численные методы анализа переходных и установившихся динамических процессов, периодических процессов, позволяющих выявлять особенности развития существенно нелинейных систем. Эффекты экономической динамики, которые обнаруживаются в существенно нелинейных моделях, рассматриваются как проявление общих закономерностей поведения нелинейных динамических систем.

Глава 1.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭКОНОМИКЕ

1.1.1. ФАКТОР ВРЕМЕНИ В ЭКОНОМИКЕ

Термин «динамика» означает движение (в более общем понимании — изменение) систем под действием приложенных к ним внешних воздействий. Исторически динамика развивалась от механики к другим естественнонаучным дисциплинам. Время в моделях динамики является основной независимой переменной. Другие независимые переменные связаны с конкретными приложениями: это координаты в механике, численность популяций в биологической динамике, концентрация веществ в химической динамике, экономические показатели в экономике. Нужно ли учитывать фактор времени при построении математических моделей процессов и явлений в области экономики? Если развитие моделируемой отрасли экономики происходит эволюционно, без резких качественных и количественных изменений в течение многих производственных циклов, когда почти постоянны спрос, цены, издержки, экономическая ситуация, то для построения модели такой отрасли можно с оговорками использовать многочисленные математические модели, в которых не участвует фактор времени. Такие ситуации нередко встречались в истории. Но где сегодня найти такую стабильную отрасль экономики?

Модели экономики, в которых не учитывается фактор времени, называются статическими (термин перешел из механики). Эти модели отражают состояние экономических объектов в периоды стабильности параметров. В динамических моделях учитывается зависимость переменных от времени и взаимозависимость переменных во времени. Фактор времени играет все более значимую роль по мере исторического развития. В настоящее время он приобретает значение основного фактора экономического развития многих отраслей. Соответственно, экономико-математическое моделирование процес-

сов, происходящих в современной экономике, естественным образом включает зависимость от времени.

Словосочетание «ускорение научно-технического прогресса» является тем примером, когда устоявшийся штамп отражает объективную реальность. В самом деле, век каменный длился порядка миллиона лет, сменивший его век бронзовый — несколько тысяч лет, с конца IV тысячелетия до н. э. до I тысячелетия до н. э. Железный век, сменивший век бронзовый, закончился появлением новых конструкционных материалов в середине XX в. Основные технологические решения, во многом определяющие уровень экономического развития, стали появляться все чаще и чаще. Ядерный век длился с 1945 г. до момента, когда эффективность ядерного оружия сделала бессмысленным его применение (живых победителей не останется). Век компьютеров начался с 1947 г. (это не случайное совпадение по времени — Вторая мировая война стимулировала развитие военных отраслей промышленности, в это время появились реактивная авиация, радиолокация, ракеты; и первые компьютеры были призваны обрабатывать радиолокационные данные для борьбы с реактивной авиацией противника). Эти открытия не только применялись в военных целях, где экономические показатели не являются основными, но и стимулировали параллельное развитие новых отраслей экономики. Атомная энергетика, гражданская реактивная авиация, коммерческие приложения космических полетов, микроволновая печь как «правнучка» первых радиолокаторов — это многочисленные невоенные применения этих открытий. И конечно, развитие компьютеров, поколения которых сменяются через несколько лет. И наконец, современное состояние, когда компьютер стал экономически и технически доступен на всех уровнях экономики, вплоть до домашнего хозяйства. Возможно, будущие историки назовут этот период компьютерным веком.

Еще одна технологическая революция, непосредственно связанная с компьютерами, происшедшая в последнее время и имеющая огромное экономическое влияние, — кардинальная перестройка технологии получения, передачи, обработки и хранения информации. Агентство «Рейтер» начинало свой информационный бизнес с того, что в 1849 г. Пауль Юлиус Рейтер применил почтовых голубей для доставки финансовых новостей, что позволило на несколько дней опередить конкурентов, которые использовали обычные конные почтовые экипажи. Сравним эту технологию с сегодняшними возможностями... Стали экономически доступными и технически надежными компьютеры, Интернет, карманные компьютеры, смартфоны, средства передачи данных; получение, хранение, обработка, передача больших объемов данных стали возможными и экономически доступными на любом уровне — от бытового до транснацио-

нального. Уже в конце XX в. стоимость хранения информации в электронном виде стала ниже, чем стоимость хранения информации на бумаге.

Глобальная навигация дала возможность точного позиционирования не только крупных объектов, но и объектов небольшого масштаба. И самое характерное, резко снизилась стоимость и появилась техническая возможность получения, хранения и обработки огромного объема информации. Еще несколько лет назад ситуацию с обработкой информации, точнее с невозможностью обработать огромный объем информации, отражал афоризм: «Где можно спрятать одно дерево? — В лесу...» и его модификации. Сегодня же ни физическое лицо, ни юридическое лицо, ни экономический объект не может рассчитывать на то, чтобы спрятаться «в толпе». Средства получения, регистрации и обработки информации делают беспочвенными эти надежды при наличии должной заинтересованности в получении необходимых данных.

Обратим внимание на другие революционные изменения в информационной технике, происшедшие в последние годы. Химическая фотография, существовавшая более 100 лет, сменилась цифровой фотографией. Появилась возможность многократного цифрового копирования, что почти полностью исключает ухудшение качества информации. Несомненно, каждое из этих направлений само по себе является интересной и привлекательной сферой экономики, но гораздо более значимым является тот факт, что эта информационная революция, происходящая в наши дни, принципиально изменяет общую экономическую ситуацию. Ускорение обмена экономической информацией приводит к новой ситуации, когда участники рынка одновременно узнают о значимых изменениях. Формально это приблизило сегодняшнюю ситуацию к давно существующей модели идеального рынка, один из постулатов которой — равнодоступность и бесплатность информации для всех участников рынка. Технически сегодня это реализовано; другие аспекты появления, обработки, распространения и утаивания бизнес-информации и дезинформации выходят за рамки обсуждаемых здесь методов экономико-математического моделирования. Техническими средствами получения бизнес-информации пользуются участники фондового рынка; домохозяйки узнают цены на бытовые товары на соответствующих сайтах. Естественное экономическое следствие повсеместного использования этих информационных возможностей — выравнивание рыночных цен.

Поколения высокотехнологичных разработок, вычислительной техники, средств обработки информации сменяются с периодичностью порядка одного года. Происходит стремительное удешевление продукции почти всех отраслей высоких технологий, в некоторых направлениях смена модельного ряда происходит в течение

нескольких месяцев. В этом ряду крупнейших технологических решений, определяющих экономический прогресс, «засидевшимся» представляется двигатель внутреннего сгорания, который, несмотря на наличие дизеля, роторно-поршневого двигателя, гибридных технологий, до сих пор является технологической основой крупнейшей отрасли экономики — автомобилестроения, связанного с множеством других отраслей и стимулирующего их развитие. А вот, например, век пейджеров продлился менее 10 лет — они почти вытеснены в связи с более широкими возможностями, предоставляемыми мобильной связью.

Еще одним принципиальным фактором необходимости учитывать фактор времени при анализе экономических процессов является процесс зарождения, развития и проявления экономических кризисов. Ни один экономический кризис не был количественно предсказан (многочисленные противоречивые качественные оценки и предсказания кризисов не позволяют делать конкретные заключения и точно определять экономическое поведение в конкретной ситуации).

Все сказанное не охватывает все происшедшие в последние годы принципиальные изменения в среде функционирования экономических систем. Эти перемены подтверждают тот факт, что фактор времени в современной экономике приобрел решающее значение, и при построении математических моделей экономических явлений и процессов мы будем учитывать этот фактор. При этом выделяются два направления: первое из них — построение математической модели, когда известна ситуация в какой-то момент времени, называемый начальным, и требуется рассчитать развитие экономической ситуации в будущем; второе — когда наблюдается периодическое повторение экономической ситуации, т.е. построение модели экономического цикла.

1.1.2. ЗАВИСИМОСТЬ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ

Рассмотрим подробнее в количественном выражении, насколько сильно показатели современной реальной экономики подвержены зависимости от времени. Мы будем пользоваться данными, актуальными на момент подготовки этого материала, но, как правило, приводить Интернет-источники актуальной информации, чтобы по прошествии некоторого времени можно было самостоятельно обновить обсуждаемые числовые материалы. Выделим два принципиально различных состояния экономики: 1) внекризисное развитие; 2) экономический кризис как переходный процесс, развивающийся во времени. Главное отличие этих двух фаз экономического развития

заключается в следующем: в период внекризисного развития на фоне глобального относительно гладкого тренда (как правило, возрастание экономических показателей) происходят колебания этих показателей относительно тренда. В период, соответствующий экономическому кризису, наблюдается резкое скачкообразное изменение экономических показателей и на фоне этого скачкообразного изменения происходят колебания (как правило, затухающие) соответствующих показателей экономики. В предкризисный период наблюдаются эффекты потери устойчивости экономических подсистем, бифуркации сценариев дальнейшего развития экономики, зарождение новых состояний, часть из которых будут устойчивыми в новых посткризисных условиях.

Заметим, что при кризисе обычно рассматривается ухудшение экономических показателей, но аналогичный переходный процесс может реализовываться и при быстром, революционном изменении экономической ситуации в сторону улучшения экономических показателей (например, в нефтедобывающих странах в период нефтяного бума).

Сначала обсудим данные внекризисного периода развития, например данные экономики России за период с 1999 г. (вслед за переходом экономики в посткризисное состояние после экономического кризиса 1998 г.). Анализируя показатели биржевого индикатора ММВБ (рис. 1.1.2.1) за 1999–2007 гг., до начала экономического кризиса 2008 г., можно констатировать наличие общей тенденции роста, на фоне которой происходили некоторые колебания анализируемого экономического параметра относительно тренда. Отметим усиление этих колебаний в предкризисный период.

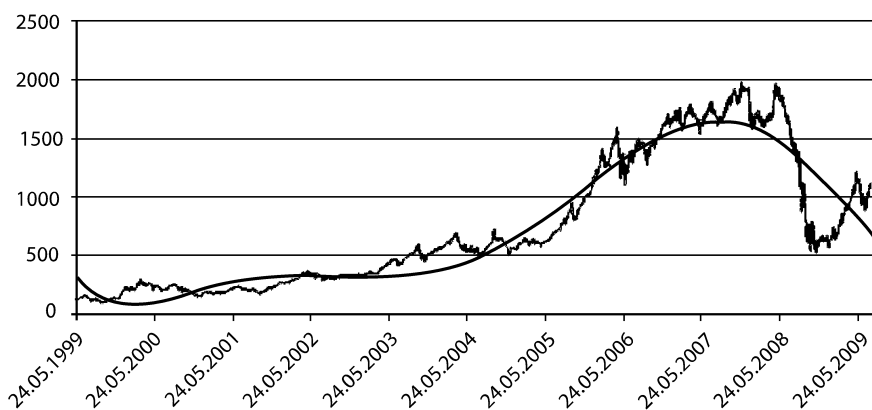


Рис. 1.1.2.1. Долговременная динамика биржевого индикатора ММВБ и полиномиальный тренд этого индикатора

Достаточно ярко эти колебания выражены при рассмотрении того же параметра за меньший отрезок времени внекризисного развития, например за 8 месяцев 2007 г. (рис. 1.1.2.2). При этом можно выделить колебания различных периодов — около двух–трех месяцев и 1–2 недель.

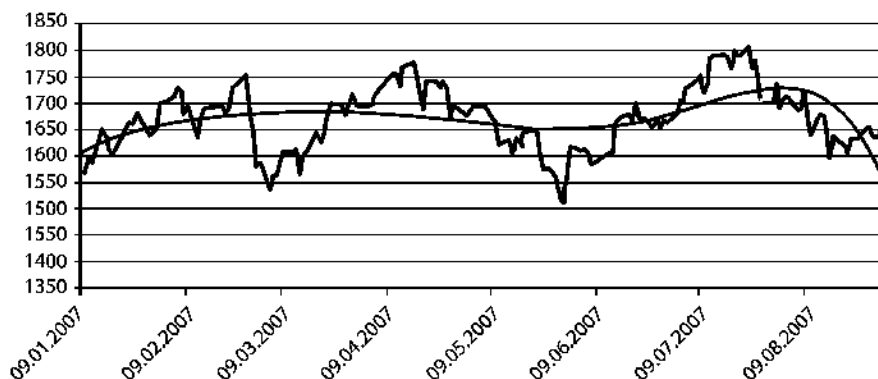


Рис. 1.1.2.2. Краткосрочная динамика биржевого индикатора ММВБ и полиномиальный тренд этого индикатора

Еще один пример цикличности показателей современной экономики приведен на рис. 1.1.2.3. Здесь в показателе темпов прироста денежных доходов населения достаточно явно прослеживается период порядка одного года.

Еще более ярко периодическая зависимость прослеживается в данных о вакансиях (рис. 1.1.2.4). Присутствует четкая тенденция



Рис. 1.1.2.3. Динамика темпов прироста денежных доходов населения

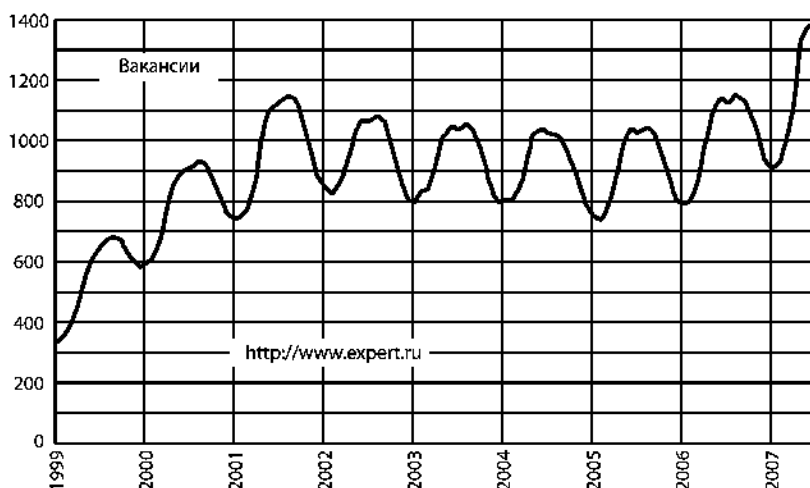


Рис. 1.1.2.4. Данные о вакансиях

минимума в начале года и максимума в середине года. Аналогичные циклические изменения наблюдаются в поведении многих других экономических показателей.

Естественно, термин «периодичность» в строгом математическом понимании по отношению к рассматриваемым изменениям экономических параметров неприменим, но периодическая (с нестрого зафиксированным периодом) повторяемость несомненна. Такого рода процессы принято называть экономическими циклами. Подробнее этот вопрос рассматривается в дальнейшем.

Поведение экономических показателей в период экономического кризиса характеризуются резкими изменениями, сопровождающимися колебаниями. На рис. 1.1.2.5 и 1.1.2.6 приводятся значения ин-

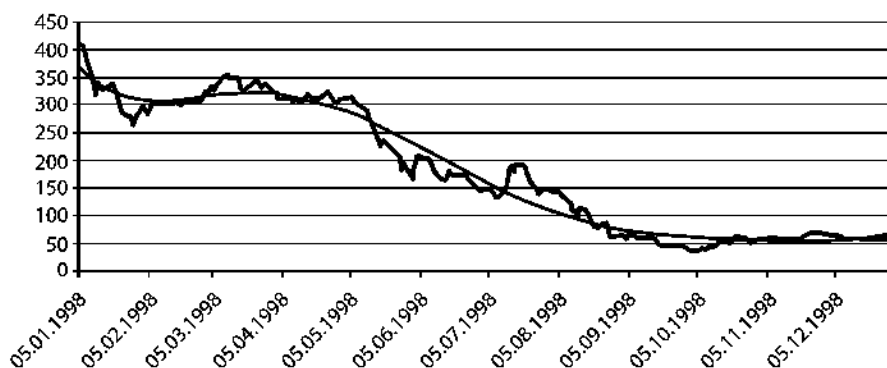


Рис. 1.1.2.5. Значение индекса РТС и полиномиальный тренд в 1998 г.

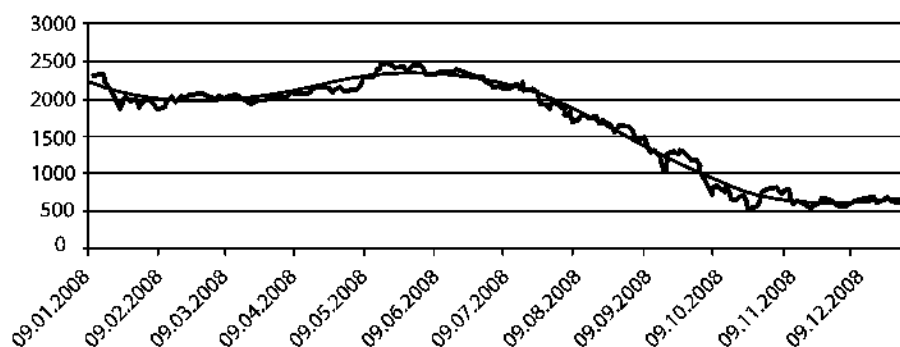


Рис. 1.1.2.6. Значение индекса РТС и полиномиальный тренд в 2008 г.

декса российской торговой системы (РТС) и их полиномиальные тренды в период кризисов 1998 и 2008 гг.

1.1.3. ТЕОРИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ И ЕЕ РАЗВИТИЕ

В естественнонаучных дисциплинах, как правило, рассматриваются периодические процессы и период понимается в строгом математическом смысле этого термина. В экономике более распространен термин «циклическость», так как многие экономические явления, повторяющиеся во времени, строго говоря, не являются периодическими.

В настоящее время обнаружено много видов экономических циклов. Большое признание получили исследования Н.Д. Кондратьева [1.1–1.3], относящиеся к анализу реальных экономических данных, в которых обнаружены циклические изменения. Научное наследие Н.Д. Кондратьева, созданное за недолгий период его активной творческой деятельности, весьма многогранно. Н.Д. Кондратьев получил существенные результаты в области экономической теории, экономики аграрного комплекса, экономической статистики, циклической динамики, теории предвидения, методологии перспективного планирования. Он разработал теорию больших циклов конъюнктуры (длинных волн экономической динамики). Известны также его работы в области теории предвидения и методологии перспективного планирования в переходной экономике.

Из анализа исторических фактов Н.Д. Кондратьев сделал важный вывод, относящийся к связи социальных явлений и циклических процессов в экономике: «Периоды повышательных волн больших циклов, как правило, значительно богаче крупными социальными потрясениями и переворотами в жизни общества (революции, войны), чем периоды понижательных волн». Следовательно, экономи-

ческие циклы могут присутствовать не только в экономической, но и в социально-политической динамике.

Теория больших циклов в экономике получила широкое развитие. Сложилось международное направление исследований длинных волн в экономической динамике. Циклические изменения в экономике анализируются в работах Й. Шумпетера, Ю. Кучинского, П. Сорокина, В. Леонтьева, Ф. Броделя, У. Митчелла, К. Фридмена, Дж. Форрестера, Г. Менша и др.

Наряду с большими циклами экономической динамики, выделяются средние циклы (9,5 года) и краткосрочные циклы (3,2 года). Некоторые исследователи связывают цикличность в экономике с волнами инноваций. В современных условиях ускорение научно-технического прогресса (НТП), уменьшение инновационного периода определяют появление экономических циклов меньшей продолжительности.

При исследовании периодических процессов в области естественных направлений были обнаружены многочисленные существенно нелинейные эффекты и возможность реализации хаоса в детерминированных динамических системах. Похожие эффекты проявляются и при анализе циклической динамики экономических систем [1.4].

Б.Дж. Берри и Х. Ким [1.5] разрабатывают методы анализа нелинейной динамики экономических рядов большой длительности. Рассматривается динамика колебаний цен и темпов экономического роста в США в 1790–1990 гг., т.е. охватывается период в 200 лет. Рассматриваются две гипотезы поведения системы во времени. Первая гипотеза предполагает, что система стремится к равновесному состоянию в отсутствие внешних воздействий; циклические колебания являются откликом на внешние воздействия. Вторая гипотеза предполагает, что поведение системы определяется в основном внутренними факторами. Этому поведению свойственна нестабильность, которая проявляется в отклонениях верхних и нижних пределов инвестиций и потребления. При этом колебания большой длительности в динамике индекса оптовых цен и темпов экономического роста, на которые накладываются колебания малой длительности, отражают непредсказуемое поведение системы и присутствие детерминированного хаоса. Таким образом, авторы [1.5] показывают, что на протяжении 200 лет циклы американской экономики Н.Д. Кондратьева длительностью порядка 50 лет сопровождались локальным хаотическим поведением системы. Квазипериодическое поведение включает хаотический режим между соседними пиками. Для периода времени до 1919 г. подтверждается вторая из упомянутых гипотез. Выводы об аттракторах и бифуркациях на пиках длинноволновой составляющей

вследствие недостаточной длины анализируемых рядов имеют предположительный характер.

Де Грин [1.6] также исследует циклы Н.Д. Кондратьева. Эти циклы включают дополнительные компоненты (технологии, менталитет и т.д.). Отмечается, что в существующих моделях циклов Кондратьева хаотические режимы возникают при различных формах обратной связи.

Таким образом, классическая теория экономических циклов развивается и дополняется принципиально новыми научными направлениями.

Глава 1.2. МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Для моделирования присутствующих в экономике процессов, зависящих от времени, используется аппарат теории дифференциальных уравнений [1.7]. Предполагая знакомство читателя с основными положениями этой теории в объеме вузовской программы, в то же время мы рассчитывали на понимание материала читателем, для которого теория дифференциальных уравнений не является стандартным математическим аппаратом.

Традиционно модели экономической динамики строились на основе дифференциальных уравнений, для которых можно было найти аналитическое решение. И это понятно: нет смысла строить модели, решение которых найти невозможно. Этот подход позволил выявить достаточно значимые эффекты, но очевидна ограниченность такой методики. Модель строится не только на основе экономических зависимостей, но и с учетом возможности нахождения аналитического решения. В настоящее время эта проблема технически упростилась за счет включения в некоторые компьютерные программы возможностей символьных преобразований, в частности символьного дифференцирования и интегрирования. Пример такой программы (и далеко не единственный) — *Mathcad* [1.8]. Поэтому мы будем считать, что проблема отыскания аналитического решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения стала в основном технической. Заметим, что основные результаты в этом направлении были получены до начала массового использования символьных процессоров. Еще раз подчеркнем принципиальную проблему этого направления моделирования — модель, кроме включения в нее экономических зависимостей, должна допускать возможность аналитического исследования. Это накладывает существенные ограничения на вид модели.

С появлением компьютеров и численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений естественным развитием методологии моделирования динамических процессов в экономике стал отказ от упомянутых ограничений. Модель может включать нелинейные зависимости, если это обусловлено особенностями моделируемого экономического явления. К возможностям аналитического исследования модели добавляются методы численного построения решений систем дифференциальных уравнений. Эти численные возможности включены во многие компьютерные программы, в том числе в *Mathcad* [1.8].

Рассмотрим некоторые модели экономической динамики, учитывающие зависимость экономических показателей от времени t . Сначала рассмотрим варианты линейных моделей.

1.2.1. МОДЕЛЬ ХАРРОДА–ДОМАРА

Используя подход [1.9], вводятся обозначения: $Y(t)$ — доход; $C(t)$ — потребление; $I(t)$ — инвестиции. Доход рассматривается как сумма потребления $C(t)$ и инвестиций $I(t)$, т.е.

$$Y(t) = C(t) + I(t). \quad (1.2.1.1)$$

Считается, что скорость роста дохода $dY(t)/dt$ пропорциональна инвестициям:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{1}{B} I(t). \quad (1.2.1.2)$$

Здесь постоянный коэффициент $1/B$ является капиталотдачей, обратная ему величина B называется коэффициентом капиталоемкости прироста дохода. В этой модели потребление $C(t)$ считается экзогенной переменной, т.е. считается заданным. Объединяя (1.2.1.1) и (1.2.1.2), получим:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{1}{B} [Y(t) - C(t)]$$

или

$$\frac{dY(t)}{dt} - \frac{1}{B} Y(t) = -\frac{1}{B} C(t). \quad (1.2.1.3)$$

Последнее выражение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Потребление $C(t) = 0$. Все ресурсы направляются в инвестиции, и достигаются максимально возможные темпы роста. В этом случае уравнение (1.2.1.3) становится однородным обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dY(t)}{dt} - \frac{1}{B} Y(t) = 0, \quad (1.2.1.4)$$

и его общее решение имеет вид

$$Y(t) = Y(0)e^{(\frac{1}{B})t}. \quad (1.2.1.5)$$

Сразу отметим нереалистичность решения (1.2.1.5) при больших значениях времени t , являющуюся следствием простоты модели: при времени $t \rightarrow \infty$ доход $Y(t) \rightarrow \infty$.

2. Потребление $C(t) = C_1$ постоянно во времени. Общее решение неоднородного уравнения (1.2.1.3) является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения (1.2.1.4) и частного решения неоднородного уравнения (1.2.1.3). Это частное решение можно найти следующим образом: ищем решение уравнения (1.2.1.3) в виде константы $Y(t) = Y_1$; для определения Y_1 подставляем это решение в уравнение (1.2.1.3) и получаем, что $Y_1 = C_1$. В итоге общее решение неоднородного уравнения в этом случае имеет вид

$$Y(t) = Y(0)e^{(\frac{1}{B})t} + C_1. \quad (1.2.1.6)$$

Здесь также проявляется отмеченное ранее несоответствие модели при $t \rightarrow \infty$.

3. Потребление $C(t)$ растет с постоянным темпом r . При этом $C(t) = C(0)e^{rt}$. Заметим, что это предположение сразу включает условие $C(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. В этом случае из (1.2.1.3) получаем обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dY(t)}{dt} - \frac{1}{B}Y(t) = -\frac{1}{B}C(0)e^{rt}. \quad (1.2.1.7)$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$Y(t) = \left(Y(0) - \frac{C(0)}{1 - Br} \right) e^{\frac{t}{B}} + \left(\frac{C(0)}{1 - Br} \right) e^{rt}. \quad (1.2.1.8)$$

Приведенные примеры соответствуют частным случаям вида правой части уравнения (1.2.1.3), при которых решение можно найти аналитически. Более подробный анализ подобных решений можно найти в [1.9], там же обсуждаются ограничения применимости моделей этого вида.

1.2.2. МОДЕЛЬ ЗВАНСА И ПАУТИНООБРАЗНАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается рынок одного товара [1.10]. В момент времени t цена на этот товар $p(t)$, спрос на него $d(t)$, предложение товара $s(t)$. Основные предположения:

1. Спрос $d(t)$ зависит от цены $p(t)$ по линейному закону:

$$d[p(t)] = a - bp(t), \quad (1.2.2.1)$$

$a > 0$, $b > 0$. Очевидно и естественно, что спрос $d(t)$ уменьшается с ростом цены $p(t)$; при $p(t) = 0$ (благотворительность) спрос равен a .

2. Предложение $s(t)$ также зависит от цены $p(t)$ по линейному закону:

$$s[p(t)] = \alpha + \beta p(t), \quad (1.2.2.2)$$

$\alpha > 0$, $\beta > 0$. Также очевидно и естественно, что предложение с ростом цены растет, при $p(t) = 0$ предложение равно α .

3. При нулевой цене $p(t) = 0$ спрос превышает предложение, т.е. $a > \alpha$.

4. Изменение цены $\Delta p(t)$ зависит от разности спроса $d(t)$ и предложения $s(t)$:

$$\Delta p(t) = \gamma[d(t) - s(t)]\Delta t. \quad (1.2.2.3)$$

Символ Δ означает приращение, $\gamma > 0$, т.е. увеличение цены за отрезок времени Δt прямо пропорционально разнице между спросом и предложением и времени Δt .

Основные предположения модели Эванса выглядят весьма логично, остается только вопрос, почему введенные зависимости именно линейные. Логичнее было бы ввести эти зависимости в табличном или другом виде по результатам исследований реального рынка, но в этом случае аналитическое получение решения становится проблематичным, необходимо привлекать численные методы. Такие подходы рассматриваются в дальнейшем.

Итак, остаемся в рамках классической линейной модели Эванса. Разделим выражение (1.2.2.3) на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. В результате получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dp(t)}{dt} = \gamma[d(t) - s(t)]. \quad (1.2.2.4)$$

Учитывая (1.2.2.1) и (1.2.2.2), получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение $dp(t) / dt = \gamma[(a - b(t)) - (\alpha + \beta p(t))]$, которое удобнее записать следующим образом:

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\gamma[(b + \beta)p(t) - a + \alpha]. \quad (1.2.2.5)$$

Будем учитывать также начальное условие

$$p(0) = p_0. \quad (1.2.2.6)$$

Уравнение (1.2.2.5) с начальным условием (1.2.2.6) составляет задачу, называемую задачей Коши. В нашем случае мы найдем аналитическое решение этой задачи. В тех случаях, когда аналитическое решение найти не удастся, можно воспользоваться численными методами решения задачи Коши. Это позволяет рассматривать обобщения модели Эванса на случай нелинейных зависимостей спроса и предложения от цены.

Оставаясь в рамках классической линейной модели Эванса, найдем решение задачи (1.2.2.5), (1.2.2.6). Соответствующее (1.2.2.5) однородное уравнение имеет вид $dp(t) / dt = -\gamma(b + \beta)p(t)$. Выпишем его общее решение:

$$p(t) = Ce^{-\gamma(b+\beta)t}. \quad (1.2.2.7)$$

Частное решение уравнения (1.2.2.5) найдем методом вариации произвольной постоянной. В (1.2.2.7) будем считать $C = C(t)$. Подставим (1.2.2.7) в (1.2.2.5):

$$\begin{aligned} \frac{dC(t)}{dt} e^{-\gamma(b+\beta)t} - C(t)\gamma(b+\beta)e^{-\gamma(b+\beta)t} = \\ = -\gamma(b+\beta)C(t)e^{-\gamma(b+\beta)t} - a + \alpha. \end{aligned} \quad (1.2.2.8)$$

После очевидных преобразований получаем

$$\frac{dC(t)}{dt} = -\gamma(-a + \alpha)e^{\gamma(b+\beta)t}.$$

Интегрируя, получим

$$C(t) = \frac{\alpha - a}{b + \beta} e^{\gamma(b+\beta)t} + C_1.$$

Подставляя найденное выражение для $C(t)$ в (1.2.2.7), имеем $p(t) = [(a - \alpha)/(b + \beta)] + C_1 e^{-\gamma(b+\beta)t}$. Используя начальное условие (1.2.2.6), можно определить константу C_1 : $C_1 = p_0 - \frac{a - \alpha}{b + \beta}$. В итоге получаем искомое решение задачи Коши:

$$p(t) = p_0 e^{-\gamma(b+\beta)t} + \frac{a - \alpha}{b + \beta} (1 - e^{-\gamma(b+\beta)t}). \quad (1.2.2.9)$$

Очевидно, что при $t \rightarrow \infty$ $p(t) \rightarrow (a - \alpha)/(b + \beta)$. Этот предел соответствует равновесной цене. Введем обозначение для равновесной цены:

$$p_e = (a - \alpha) / (b + \beta). \quad (1.2.2.10)$$

Решение (1.2.2.9) отражает переходный процесс выравнивания цены от начальной цены p_0 к равновесной цене p_e .

Рассмотрим понятие равновесной цены с другой точки зрения. Если цена стала равновесной, т.е. постоянной во времени, производная $dp(t) / dt = 0$. Тогда из (1.2.2.5) получим $0 = -\gamma[(b + \beta)p_e - a + \alpha]$, откуда следует выражение, совпадающее с (1.2.2.10). С этой точки зрения точка p_e называется стационарной точкой уравнения (1.2.2.5). Равновесная цена соответствует ситуации, когда время t перестает быть значимым фактором. То есть модель Эванса как частный случай включает и модель, не учитывающую время. В этом случае равновесную цену можно найти как решение уравнения, получающегося при равенстве спроса (1.2.2.1) и предложения (1.2.2.2) при всех переменных, не зависящих от времени t : $d(p) = s(p)$, откуда следует уравнение относительно p : $a - bp = \alpha + \beta p$. Решение этого уравнения $p = (a - \alpha) / (b + \beta)$ совпадает с выражением для равновесной цены и стационарной точки для модели Эванса. Ситуация установившегося равновесия между спросом d и предложением s в зависимости от цены p при линейной зависимости спроса и предложения от цены, аналогичной (1.2.2.1), (1.2.2.2), $d = a - bp$, $s = \alpha + \beta p$ приведена на рис. 1.2.2.1.

Обобщение этой модели на случай нелинейной зависимости спроса и предложения от цены иллюстрируется рис. 1.2.2.2.

График переходного процесса (1.2.2.9) соответствует экспоненциальному затуханию отклонения текущей цены от равновесной и не включает осцилляций. Однако при подобном подходе можно предположить, что процесс изменения цены может иметь и составляющую, подверженную колебаниям цены вокруг тренда, соответ-

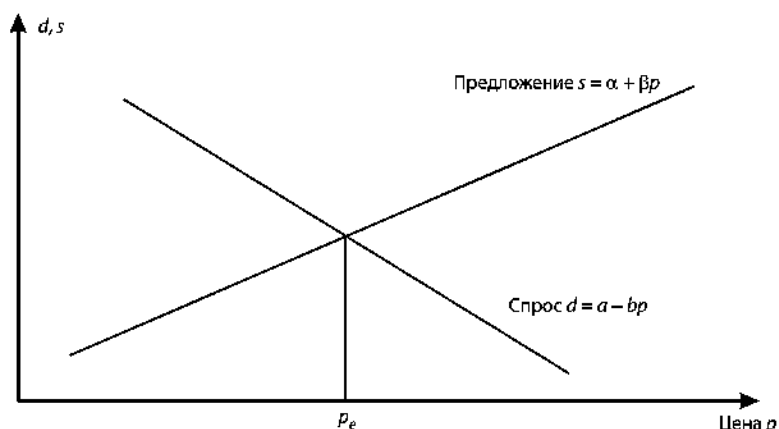


Рис. 1.2.2.1. Равновесие между спросом и предложением в зависимости от цены. Линейный вариант

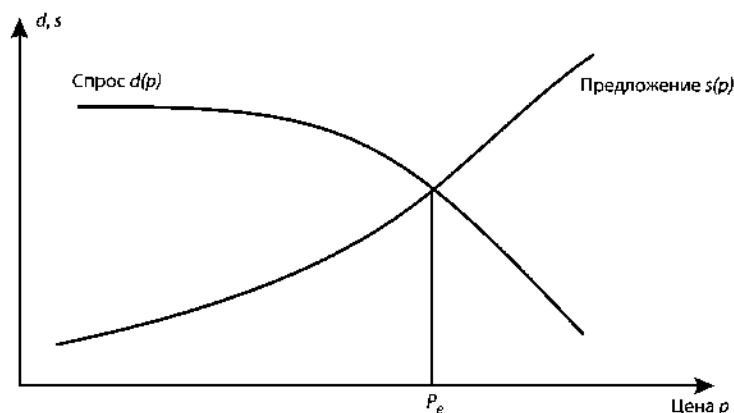


Рис. 1.2.2.2. Равновесие между спросом и предложением в зависимости от цены.
Нелинейный вариант

ствующего повышению или понижению уровня цены. Рассмотрим ситуацию, представленную на рис. 1.2.2.3.

Пусть в момент времени t_0 цена товара p_0 меньше равновесной цены p_e . Тогда спрос превышает предложение, товар будет раскуплен по этой цене, возникнет дефицит и цена поднимется до уровня $p_1 > p_e$, соответствующего достигнутому уровню спроса по предыдущему уровню цены p_0 . При этом уровне цены p_1 предложение превышает спрос, возникает затоваривание и цена снижается к уровню $p_2 < p_e$, соответствующему достигнутому уровню предложения. Возникают колебания (осцилляции) цены, и в приведенном примере эти

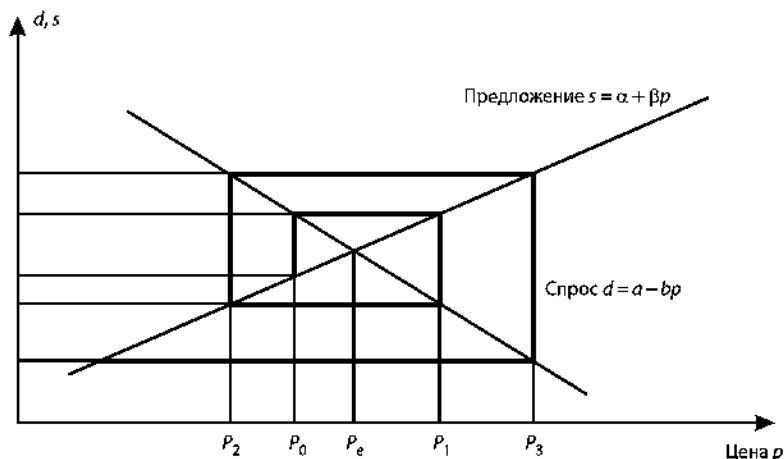


Рис. 1.2.2.3. Возникновение нарастающих колебаний цены в линейной модели рынка одного товара

колебания являются нарастающими (рис. 1.2.2.4). Естественно, нарастание колебаний не может продолжаться бесконечно; с ростом амплитуды становятся значимыми нелинейные факторы, не учитываемые в рассматриваемом линейном варианте.

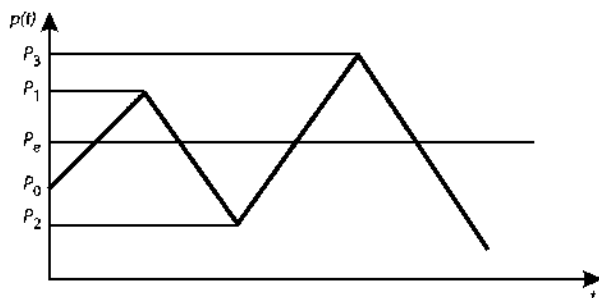


Рис. 1.2.2.4. Нарастающие колебания цены в линейной модели рынка одного товара

В случае когда с ростом цены предложение растет более значительно, а спрос падает менее быстро, могут возникнуть затухающие колебания цены во времени, сходящиеся к равновесной цене p_e (рис. 1.2.2.5 и 1.2.2.6).

В соответствии с рис. 1.2.2.3 и 1.2.2.5 рассматриваемая модель динамики рынка одного товара называется *паутинообразной*.

Возможен вариант установившихся колебаний цены во времени (рис. 1.2.2.7 и 1.2.2.8).

Отметим, что, как правило, рыночная система обладает стабилизирующим фактором, поэтому в основном реализуются затухающие колебания цены во времени. В предкризисные и кризисные периоды на ограниченных интервалах времени могут реализовываться нарас-

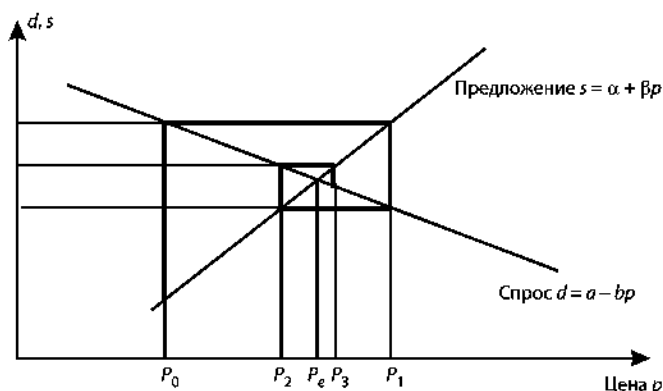


Рис. 1.2.2.5. Возникновение затухающих колебаний цены в линейной модели рынка одного товара

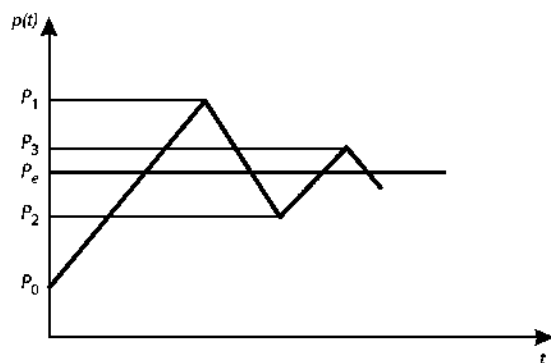


Рис. 1.2.2.6. Затухающие колебания цены в линейной модели рынка одного товара

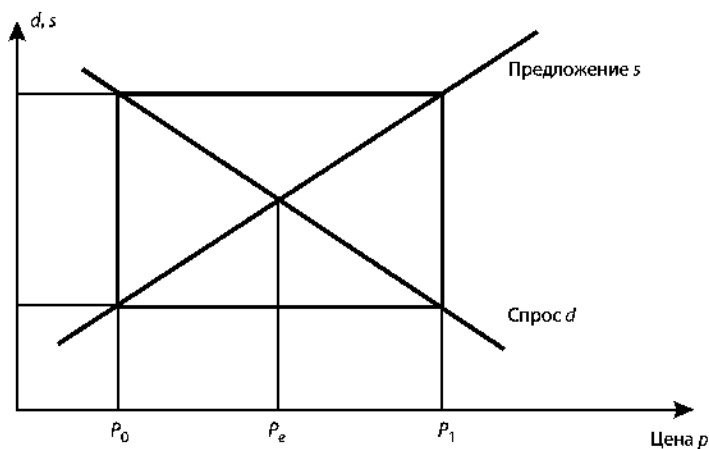


Рис. 1.2.2.7. Возникновение установившихся колебаний цены в линейной модели рынка одного товара

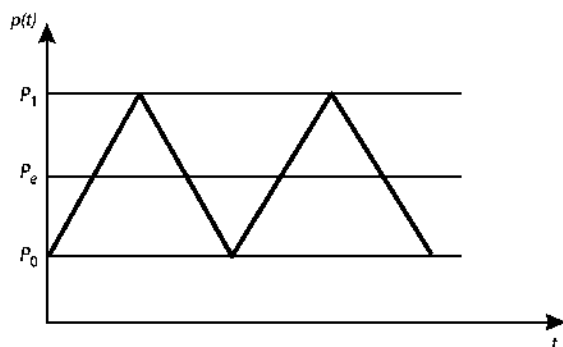


Рис. 1.2.2.8. Установившиеся колебания цены в линейной модели рынка одного товара

тающие и установившиеся режимы колебаний цены. Обратим внимание на схожесть приведенных графиков паутинообразной модели с фазовыми портретами и функциональными зависимостями от времени, используемыми при анализе динамических систем. Приведенные на рис. 1.2.2.4, 1.2.2.6 и 1.2.2.8 кривые зависимости цены от времени являются схематичными, на практике в точках экстремумов кривые являются достаточно гладкими.

Аналогичные колебания возникают и в случае нелинейных зависимостей спроса и предложения от цены (рис. 1.2.2.9).

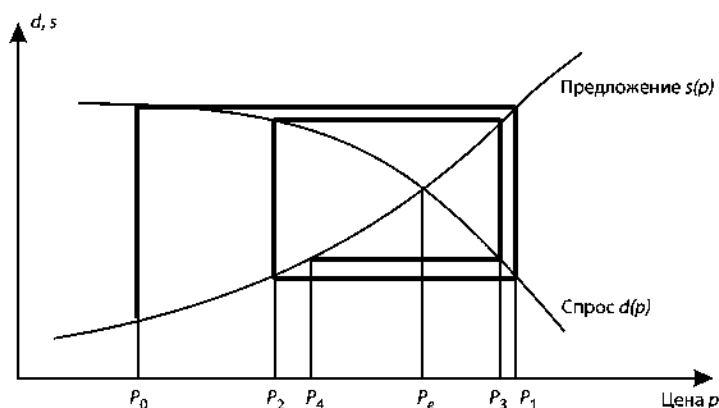


Рис. 1.2.2.9. Колебания цены в нелинейной модели рынка одного товара

1.2.3. МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ВАЛОВОГО ПРОДУКТА

Р.М. Нижегородцев [1.11] предложил следующую модель динамики валового продукта:

$$m \frac{d^2 W}{dt^2} + b \frac{dW}{dt} - cW = f, \quad (1.2.3.1)$$

где W — совокупный общественный продукт; t — непрерывное время; f — совокупный объем инвестиций, который имеет положительный знак, если инвестиции вкладываются в экономику, и отрицательный, если инвестиции изымаются из экономики (отток капитала).

Параметр $m > 0$ является мерой инерции хозяйственной системы; параметр $b > 0$ — мера сопротивления переменам, происходящим под действием инвестиций f ; параметр $c > 0$ — норма накопления. Его экономический смысл можно выяснить, рассмотрев хронически депрессивное состояние экономики, когда $d^2 W/dt^2 = dW/dt = 0$. При этом получаем отток капитала из экономики, равный произведению

нормы накопления c на величину валового продукта W . Параметры m и b определяются статистическими методами по данным предшествующей динамики экономической системы.

Отметим, что формально модель (1.2.3.1) близка к изучаемой в школьном курсе физики задаче о колебаниях грузика массой m на пружине с жесткостью c при наличии сопротивления, пропорционального скорости, с коэффициентом пропорциональности b под воздействием внешней силы f . Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$m \frac{d^2 W}{dt^2} + b \frac{dW}{dt} + cW = f \quad (1.2.3.2)$$

и отличается от (1.2.3.1) только знаком перед слагаемым cW . В некоторых конкретных вариантах функции $f(t)$ для уравнения (1.2.3.2) получены аналитические решения. В частности, при $f(t) = \sin(\omega t)$ модель (1.2.3.2) соответствует вынужденным колебаниям, можно аналитически построить амплитудно-частотную характеристику и исследовать резонансные колебания, когда частота внешнего воз-

действия ω близка к собственной частоте системы $\sqrt{\frac{c}{m}}$.

Отличие в знаке перед слагаемым cW весьма существенно влияет на поведение моделируемой системы. Модель вида (1.2.3.1) в механике известна как система с отрицательной жесткостью. Как правило, эти системы рассматриваются в более сложной, нелинейной постановке.

Перейдем к рассмотрению нелинейных моделей экономической динамики.

1.2.4. МОДЕЛЬ СОЛОУ

Состояние экономики в модели Солоу [1.10] задается пятью переменными, зависящими от непрерывного времени t : $Y(t)$ — конечный продукт; $L(t)$ — трудовые ресурсы; $K(t)$ — производственные фонды; $I(t)$ — инвестиции; $C(t)$ — величина непроизводственного потребления. Считается, что все ресурсы используются полностью. Конечный продукт $Y(t)$ является нелинейной функцией производственных фондов $K(t)$ и трудовых ресурсов $L(t)$: $Y = F(K(t), L(t))$. Функцию F можно считать производственной. Кроме того, считается, что $Y(t) = C(t) + I(t)$, т.е. весь конечный продукт используется для непроизводственного потребления и инвестиций.

Нормой накопления ρ называется доля конечного продукта, используемая для инвестиций, т.е. $I(t) = \rho Y(t)$, $C(t) = (1 - \rho)Y(t)$. Норма накопления ρ считается постоянной, $0 < \rho < 1$.

Считается, что инвестиции используются на восстановление выбывших фондов и на их прирост. Вводится коэффициент выбытия фондов в расчете на год μ , $0 < \mu < 1$. Тогда для прироста фондов ΔK можем записать:

$\Delta K = K(t + \Delta t) - K(t) = \rho Y \Delta t - \mu K \Delta t$. Разделив последнее выражение на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим:

$$dK/dt = \rho Y - \mu K. \quad (1.2.4.1)$$

Принимается, что прирост трудовых ресурсов пропорционален имеющимся трудовым ресурсам, т.е. $\Delta L = \nu L \Delta t$ (ν — коэффициент пропорциональности). Из этого предположения следует дифференциальное уравнение для динамики изменения трудового ресурса:

$$dL/dt = \nu L. \quad (1.2.4.2)$$

Решение этого уравнения для условий в начале наблюдения при $t = 0$, $L(0) = L_0$ имеет вид

$$L = L_0 e^{\nu t}. \quad (1.2.4.3)$$

Сразу отметим, что при $t \rightarrow \infty$ трудовой ресурс $L(t) \rightarrow \infty$. Естественно, бесконечный трудовой ресурс не может быть реализован в реальной природе. Это несоответствие есть следствие линеаризации модели воспроизводства трудового ресурса (1.2.4.2). В ней не учтены различные факторы, влияющие на ограничение скорости роста трудового ресурса, — ограничения по территории, достаточности размеров непроизводственного потребления, различные государственные меры по увеличению или снижению скорости изменения трудового ресурса, влияние религии, моды, средств массовой информации на рассматриваемый процесс. Итак, чрезмерное упрощение модели (1.2.4.2), отбрасывание значимых факторов привели к получению результата, который может рассматриваться лишь на ограниченном отрезке времени.

Модель Солоу задается системой уравнений:

$$\begin{cases} C(t) = (1 - \rho)Y(t) \\ Y(t) = F(K(t), L(t)) \\ L = L_0 e^{\nu t} \\ \frac{dK(t)}{dt} = \rho Y(t) - \mu K(t) \\ K(0) = K_0 \end{cases} \quad (1.2.4.4)$$

Функция $F(K, L)$ удовлетворяет требованиям к производственным функциям. Она является линейно-однородной, т.е. $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$. Введем обозначения для средней производительности труда $y = Y/L$ и для средней фондовооруженности $k = K/L$. Используя свойство линейной однородности функции $F(K, L)$, получим $y = F(K, L)/L = F(K/L, 1) = F(k, 1)$. Функцию $F(k, 1)$ можно считать функцией одной переменной k . Обозначим $F(k, 1) = f(k)$. В итоге получаем уравнение $y = f(k)$. Найдем производную:

$$\begin{aligned} dk/dt &= d(K/L)/dt = [(dK/dt)L - K(dL/dt)]/L^2 = \\ &= (dK/dt)L - K(dL/dt)/L^2 = (\rho Y - \mu K)/L - K\nu/L = \rho y - (\mu + \nu)k. \end{aligned}$$

Итак,

$$dk/dt = \rho f(k) - (\mu + \nu)k,$$

$$k(0) = k_0 = K_0/L_0. \quad (1.2.4.5)$$

Последнее уравнение нелинейно, так как в правой части присутствует функция $f(k)$.

Рассмотрим стационарную траекторию, т.е. ту, на которой фондовооруженность k постоянна и равна своему начальному значению k_0 . Если фондовооруженность k постоянна, то $dk/dt = 0$. Из уравнения (1.2.4.5) получаем

$$\rho f(k) - (\mu + \nu)k = 0. \quad (1.2.4.6)$$

Это нелинейное алгебраическое уравнение может в общем случае не иметь решений или иметь единственное или неединственное решение. Но в нашем случае $f(k) = F(k, 1)$, а по требованиям к производственной функции $df/dk > 0$, $df/dk \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, $f(k)$ — возрастающая функция и скорость ее роста замедляется при $k \rightarrow \infty$. Решение нелинейного алгебраического уравнения (1.2.4.6) при выполнении условия $\rho(df(0)/dk) > (\mu + \nu)$ приведено на рис. 1.2.4.1.

Найдем показатели экономики в этой ситуации. Уже найдена динамика трудовых ресурсов $L(t)$ (см. (1.2.4.3)), производственные фонды $K(t) = k_0 L(t) = k_0 L_0 e^{\nu t}$. Конечный продукт $Y(t) = f(k_0)L(t) = f(k_0)L_0 e^{\nu t}$. Величина непроизводственного потребления $C(t) = (1 - \rho)Y(t) = (1 - \rho)f(k_0)L_0 e^{\nu t}$. Размер инвестиций $I(t) = \rho f(k_0)L_0 e^{\nu t}$.

Получен следующий результат: на стационарной траектории при постоянной фондовооруженности основные экономические показатели растут экспоненциально, пропорционально трудовым ресурсам. Естественно, этот результат может рассматриваться лишь на ограниченном отрезке времени. Это является следствием линеаризации части модели, относящейся к приросту трудовых ресурсов.

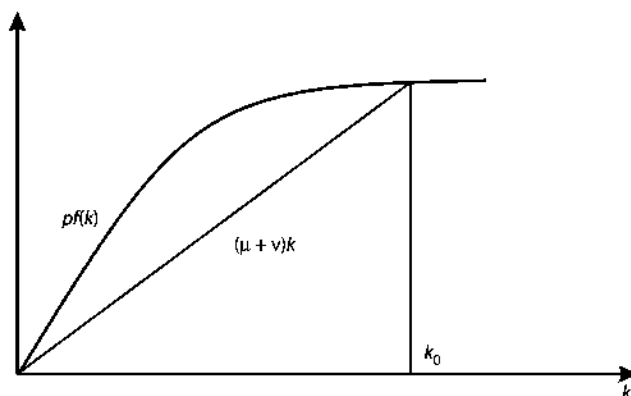


Рис. 1.2.4.1. Решение нелинейного алгебраического уравнения

1.2.5. МОДЕЛЬ ДЕЛОВОЙ АКТИВНОСТИ

Считается, что у предпринимателей в момент времени t есть материальные ресурсы $x(t)$ и набор способов $y(t)$ зарабатывать ресурсы или денежные средства. Для моделирования этой ситуации В.П. Милованов [1, 12] предлагает следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = a_1 y + a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 xy^2 - a_5 x - a_6 x^2 \\ \frac{dy(t)}{dt} = b_1 x - b_2 y. \end{cases} \quad (1.2.5.1)$$

Автор следующим образом интерпретирует составляющие модели: слагаемое $a_1 y$ означает, что чем больше различных способов заработать деньги имеется в распоряжении предпринимателей, тем больше денег они заработают. Коэффициент a_1 — средняя эффективность применения способа зарабатывать деньги. Величина $a_2 xy$ означает, что в организацию дела нужно вкладывать деньги, тогда отдача от такого финансирования дела связана с эффективностью a_2 . Слагаемое $a_3 y^2$ означает, что индивиды планируют свою деятельность, используя способы для зарабатывания денег с эффективностью a_3 .

Величина $a_4 xy^2$ означает, что для планирования деятельности нужно затрачивать деньги, которые могут расходоваться также и на проведение научных исследований. Выигрыш в финансировании планирования связан с эффективностью a_4 .

Величины $-a_5 x$ и $-a_6 x^2$ связаны с непроизводительным потреблением (личные расходы, социальные нужды и т.д.). При этом слагаемое с x^2 означает планирование потребления. Слагаемые, входящие

в правую часть второго уравнения (1.2.5.1), означают: b_1x — возрастание числа производственных способов пропорционально наличным деньгам; $-b_2y$ — уменьшение числа способов, применяемых в производственной деятельности, из-за того что некоторые из них оказываются малоэффективными.

Заметим, что все слагаемые в модели вводятся констатирующим способом, например величина a_2xy означает, что в организацию дела нужно вкладывать деньги, тогда отдача от такого финансирования дела связана с эффективностью a_2 . Остаются открытыми вопросы о виде этой зависимости, почему именно a_2xy , а не, например, a_2xy^2 , и о величине коэффициента эффективности a_2 .

Система уравнений (1.2.5.1) является системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Аналитическое решение подобных систем в общем случае невозможно; исследуются лишь положения равновесия и характер особых точек на фазовой плоскости. Для получения решения используются методы численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом нелинейный характер зависимостей не создает дополнительных трудностей.

1.2.6. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭКОНОМИКЕ

А.Д. Смирнов [1.13] основное уравнение макроэкономической динамики записывает в следующей форме:

$$\begin{aligned}\frac{dp(t)}{dt} &= f(p, \mu, \delta), \\ f(0, 0, 0) &= 0.\end{aligned}\tag{1.2.6.1}$$

Здесь $p = \ln(P/P^*)$ — логарифм индекса цен, P — текущие цены, P^* — уровень цен в точке равновесия. Значения $p > 0$ соответствуют ценам выше равновесного уровня, $p < 0$ — ценам ниже равновесного уровня. Величина производной $dp(t)/dt > 0$ характеризует уровень инфляции, $dp(t)/dt < 0$ соответствует дефляции; μ — переменная, характеризующая ожидания бизнеса и населения; δ — переменная, характеризующая уровень агрегированного спроса. Считается, что переменная p определяет состояние макроэкономической системы, а μ и δ являются параметрами системы, вычисляемыми экзогенно, т.е. вне этой модели. Уравнение (1.2.6.1) по экономическому смыслу представляет собой простую модель инфляции.

Автор приводит конкретные варианты модели (1.2.6.1), в частности в виде нелинейного дифференциального уравнения $dp(t)/dt = \delta + \mu p - p^3$.

1.2.7. МОДЕЛЬ ФОРРЕСТЕРА

В 1968 г. по инициативе бизнесмена и общественного деятеля, вице-президента компании «Оливетти», члена административного совета компании «Фиат» Аурелио Печчеи был создан Римский клуб — международная неправительственная организация. Финансировавшие на начальном этапе деятельность Клуба автомобильные концерны «Фиат» и «Фольксваген» были заинтересованы в получении информации о перспективах развития энергетической и сырьевой индустрии. Эти данные использовались для анализа рынков сбыта автомобилей. Входящие в клуб ученые различных направлений — экономисты, кибернетики, социологи и др., участвующие в подготовке этих прогнозов, в своих исследованиях захватывали более широкий круг вопросов, связанный с глобальными проблемами. В итоге в решаемые Римским клубом задачи стали включать исследования развития человечества в эпоху научно-технической революции. Основные цели Римского клуба: разработать методику анализа трудностей, связанных с ограниченностью ресурсов Земли, ростом производства и потребления; привлечь внимание к критической ситуации по ряду проблем; предложить меры для достижения глобального равновесия.

Довольно быстро члены Клуба пришли к пониманию ценности математического моделирования для решения поставленных задач. Проект возглавил Джей Форрестер. Ранее он участвовал в разработке одного из первых универсальных компьютеров, в проекте по применению электронных технологий для национальной обороны, предложил технику компьютерного моделирования реальных процессов — это направление получило известность как динамика систем. К моменту начала работы в Римском клубе Форрестер разработал динамические модели предприятия [1.14] и города [1.15]. В конце 60-х — начале 70-х гг. XX в. по предложению клуба Форрестер применил разработанную им методику моделирования на ЭВМ к проблеме глобального развития человечества. Результаты исследования были представлены в книге «Мировая динамика» [1.16], впервые опубликованной в 1971 г. Основным результатом моделирования был пессимистическим: дальнейшая эволюция человечества на Земле, учитывая ограниченность ресурсов, приведет к экологической катастрофе в 20-х гг. XXI в.

После обсуждения модели Форрестера исполнительный комитет Клуба поручил ученикам Форрестера продолжить исследование. Модель была существенно доработана. По результатам этого исследования начало глобального кризиса приходится на 60-е гг. XX в. Эта работа была проведена в Массачусетском технологическом институте (США) под руководством Д. Медоуза. Результаты ее были опубли-

кованы в 1972 г. Модель Форрестера — Медоуза стала основой отчета Римского клуба.

Результаты исследований Форрестера — Медоуза вызвали широкое обсуждение не только в сообществе научных работников, но и в средствах массовой информации, среди политиков и экономистов. В процессе обсуждения прозвучала серьезная критика, в частности авторов исследования упрекали в фетишизации ЭВМ.

Пессимистические предсказания моделирования стимулировали ученых подробно анализировать модель Форрестера. Было выявлено, что многие зависимости в модели Форрестера были качественные или полуколичественные, обосновывающиеся на уровне здравого смысла; не учитываются ускорение НТП и возможное появление новых источников энергии; не учитывается возможность использовать часть капитала или получаемой энергии на ликвидацию загрязнений. Эти возражения достаточно веские, но принципиально новые источники энергии пока не появились, ликвидация загрязнений не стала приоритетным направлением. Поэтому пессимистические результаты прогнозов Дж. Форрестера нельзя игнорировать.

Причиной катастрофы Форрестер считал технологические проблемы. В качестве мер по предотвращению он предлагал уменьшить рождаемость, снизить потребности, вернуться к состоянию допромышленного мира. Как альтернатива этой концепции нулевого роста в докладе международной комиссии ООН в 1987 г. была озвучена концепция устойчивого развития. Имеется в виду такой сценарий развития человечества, который обеспечивает удовлетворение потребностей настоящего времени, но не ставит под угрозу возможность будущих поколений удовлетворять свои потребности. В условиях ограниченных ресурсов планеты необходимо, чтобы развитие общества соответствовало состоянию окружающей среды. Составной частью концепции устойчивого развития является концепция замкнутых технологических циклов, которая предполагает использование отходов одного предприятия в качестве сырья для другого. Модель Форрестера и ее обобщения — прекрасный пример использования математического моделирования для анализа сложнейших глобальных проблем человечества. При этом в комплексе рассматриваются вопросы динамического моделирования, экономики, экологии, этики, философии, политики, многих других направлений деятельности человечества. Отсутствие однозначного решения проблемы — следствие огромной сложности моделируемой системы.

Математическая модель реализована и представлена на использовавшемся в те годы языке динамического моделирования *DYNAMO*. Впоследствии эта модель была описана на других языках моделирования или языке обыкновенных дифференциальных уравнений [1.17].

Для основных переменных записываются однотипные дифференциальные уравнения вида

$$\frac{dy}{dt} = y^+ - y^-,$$

где y^+ — положительный темп скорости переменной y , включающий в себя все факторы, вызывающие рост переменной y ; y^- — отрицательный темп скорости, включающий в себя все факторы, вызывающие убывание переменной y .

Считается, что эти темпы представляются в виде произведения функций, зависящих только от факторов $F_j = g_j(y_{i1}, \dots, y_{im})$ — комбинаций основных переменных. Иными словами, факторы являются функциями основных переменных. Таким образом, считается, что

$$y^\pm = g(y_1, y_2, \dots, y_n) = f(F_1, F_2, \dots, F_k) = f_1(F_1) f_2(F_2) \dots f_k(F_k),$$

причем $m = m(j) < n$, $k = k(j) < n$ (число уровней). Считается, что факторов меньше, чем основных переменных, и каждый фактор зависит не от всех основных переменных, а только от некоторых из них.

Естественно, часть присутствующих в реальных процессах факторов в модель не включена: считается, что их влияние незначительно. Кроме того, субъективное представление темпов в виде произведения функций, зависящих от факторов, в определенной мере ограничивает применимость результатов моделирования. Кроме того, не учитываются возможные революционные изменения, которые могут привести к существенным изменениям значимости отдельных факторов.

Построение модели мировой динамики проводилось Форрестером поэтапно. Рассмотрим основные этапы.

Этап 1. Концептуализация — выделение основных проблем. По мнению Форрестера, наиболее существенными мировыми проблемами являются: 1) быстрый рост населения; 2) индустриализация и связанный с ней промышленный рост; 3) нехватка пищи; 4) рост отходов производства; 5) нехватка ресурсов.

Исходя из этого основными переменными модели выбираются:

- население P ;
- основные фонды K ;
- доля фондов в сельском хозяйстве (т.е. в отрасли обеспечения пищей) X ;
- уровень загрязнения (или просто загрязнение) Z ;
- количество невозобновляемых (невосстановимых) природных ресурсов R .

Факторами, определяющими взаимное влияние переменных при построении дифференциальных уравнений, являются:

- относительная численность населения P_p (население, нормированное к численности населения Земли в 1970 г.);
- удельный капитал K_p ;
- материальный уровень жизни C ;
- относительный уровень питания (количество пищи на человека) F ;
- нормированная величина удельного капитала в сельском хозяйстве X_p ;
- относительное загрязнение Z_s ;
- доля остающихся ресурсов R_R .

Помимо перечисленных основных переменных Форрестер ввел еще показатель качества жизни Q , который имеет характер индикатора. Зависит этот индикатор от четырех факторов — P_p , C , F , Z_s : $Q = Q_C Q_F Q_P Q_Z$.

Основные переменные имеют разные размерности. Население оценивается количеством людей, доля фондов в сельском хозяйстве — безразмерная величина между 0 и 1. Выбор единиц для фондов, загрязнения и ресурсов осуществлялся нормированием к базовому году. Единицей капитала считается величина капитала, приходящегося на душу населения в 1970 г.; единицей ресурсов считается их годовое потребление в 1970 г.; за единицу загрязнения принимается условная величина — загрязнение, приходящееся на одного человека в 1970 г.

Этап 2. Составление уравнений. Для основных переменных записывается система дифференциальных уравнений, которая в упрощенном виде выглядит следующим образом:

$$\frac{dP}{dt} = P(B - D), \quad (1.2.7.1)$$

$$\frac{dK}{dt} = K_+ - \frac{K}{T_K}, \quad (1.2.7.2)$$

$$\frac{dX}{dt} = X_+ - \frac{X}{T_X}, \quad (1.2.7.3)$$

$$\frac{dZ}{dt} = Z_+ - \frac{Z}{T_Z}, \quad (1.2.7.4)$$

$$\frac{dR}{dt} = -R_-, \quad (1.2.7.5)$$

где $B = B(C, F, P_p, Z_s) = c_B \cdot B_C(C) \cdot B_F(F) \cdot B_P(P_p) \cdot B_Z(Z_s)$ — темп рождаемости; $D = D(C, F, P_p, Z_s) = c_D \cdot D_C(C) \cdot D_F(F) \cdot D_P(P_p) \cdot D_Z(Z_s)$ — темп смертности; $K_+ = K_+(P, C) = P \cdot K_C(C)$ — скорость производства основных фондов; $X_+ = X_+(F, Q) = X_F(F) \cdot X_Q(Q) / T_X$ — прирост доли сельскохозяйственных фондов; $Z_+ = Z_+(P, K_p) = P \cdot Z_K(K_p)$ — скорость генерации загрязнения; $T_Z = T_Z(Z_s)$ — характерное время естественного разложения загрязнения; $R_- = R_-(P, C) = PR_C(C)$ — скорость потребления ресурсов.

Вспомогательные переменные записываются следующим образом:

- $P_p = P/P_N$ — относительная плотность населения;
- $K_p = K/P$ — удельный капитал;
- $Z_s = Z/Z_N$ — относительное загрязнение;
- $R_R = R/R_0$ — доля оставшихся ресурсов;
- $X_p = K_p \cdot X/X_N$ — относительная величина сельскохозяйственных фондов;
- $Q_{CF} = Q_C/Q_F$ — относительное качество жизни;
- $F = F_X F_P F_Z$ — уровень питания;
- $C = K_p [(1-X)/(1-X_0)] E_R$ — материальный уровень жизни;

Приведенные символы с подстрочными индексами (B_C, B_F, K_C и т.д.) в процессе моделирования формировались в виде таблиц с линейной интерполяцией либо экспертами в данной области, либо самим Форрестером. Такой подход удобен при компьютерной реализации рассматриваемых динамических процессов. В качестве примеров на рис. 1.2.7.1 и 1.2.7.2 представлены зависимости темпа рождаемости B_C от материального уровня жизни C и множителя добычи природных ресурсов E_R , входящего в выражение для материального уровня жизни C , от количества невозобновляемых (невосстановимых) природных ресурсов R .

В модели используются следующие константы:

- $c_B = 0,04$ — нормальный темп рождаемости;
- $c_D = 0,028$ — нормальный темп смертности;
- $c_K = 0,05$ — нормальный темп фондообразования;
- $T_K = 40$ лет — постоянная износа основных фондов;
- $T_X = 15$ лет — время выбытия доли сельскохозяйственных фондов;
- $t_N = 1970$ — базовый год;
- $P_N = 3,6 \cdot 10^9$ — численность населения в 1970 г.;
- $X_N = 0,3$ — нормальная часть фондов в сельском хозяйстве;

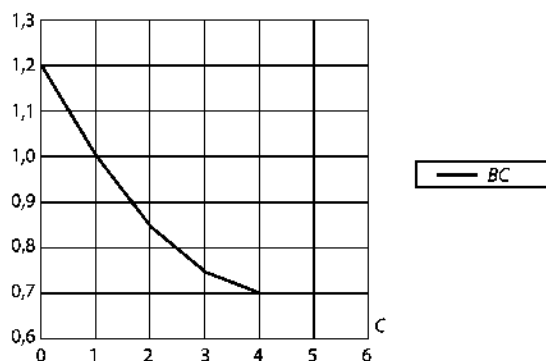


Рис. 1.2.7.1. Зависимость темпа рождаемости от материального уровня жизни

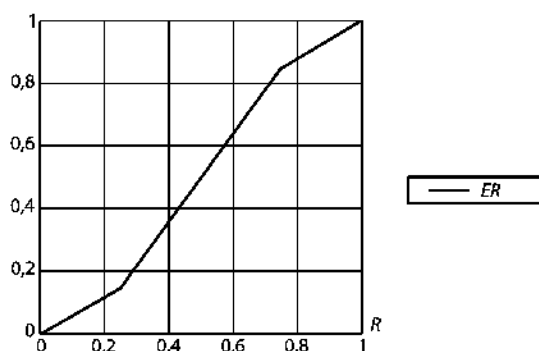


Рис. 1.2.7.2. Добыча природных ресурсов в зависимости от невозобновляемых ресурсов

$Z_N = 3,6 \cdot 10^9$ — стандартное загрязнение, численно совпадающее с P_N

Начальные данные принимаются такими:

$t_0 = 1900$, $P_0 = 1,65 \cdot 10^9$, $K_0 = 0,4 \cdot 10^9$, $X_0 = 0,2$, $Z_0 = 0,2 \cdot 10^9$, $R_0 = 9 \cdot 10^{11}$. Такое значение было принято из предположения, что ресурсов при скорости их потребления, как в 1970 г., должно хватить на 250 лет. Эта константа принята по соображениям здравого смысла исходя из имевшихся в тот период данных. При этом не рассматриваются возможные революционные изменения в этот период.

Расчеты по своей модели Форрестер проводил для временного интервала с 1900 по 2100 г. Период с 1900 по 1970 г. использовался для настройки параметров модели на известных данных. Впоследствии такие интервалы стали называться интервалами обучения (подбор параметров) и экзамена (проверки достоверности результатов моделирования на известных данных). Период с 1970 г. является периодом прогнозирования. На этапах обучения и экзамена параметры модели (в частности, c_B , c_D , c_K), начальные данные и отчасти

табличные функции подбирались таким образом, чтобы результаты моделирования были максимально близки к реальной мировой динамике на интервале от 1900 до 1970 г. После этого проводилось прогнозное моделирование. Некоторые результаты моделирования представлены на рис. 1.2.7.3.

Из рисунка видно, что после периода монотонного роста численность населения с 2025 г. начинает уменьшаться, причем за 75 лет сокращается в полтора раза, т.е. почти на 2 млрд человек. Невозобновляемых природных ресурсов к 2100 г. остается меньше начальных запасов (т.е. R_0), уровень загрязнения к 2050 г. в несколько раз превышает стандартный уровень Z_N , а затем начинает падать, что является следствием общего упадка промышленности и сокращения численности населения.

Еще раз подчеркнем, что Форрестер не учитывает НТП, его неравномерный во времени характер, возможности технологических прорывов в различных направлениях. Технологический уровень зафиксирован на текущем этапе, и современные тенденции в части потребления ресурсов, роста загрязнения, выбытия плодородных земель, демографической динамики экстраполируются на будущие периоды. Это определяет сферу применимости результатов — только для эволюционно развивающихся систем.

Параметрический анализ модели, при котором по очереди менялись такие параметры модели, как запасы ресурсов, их потребление на душу населения, продуктивность сельского хозяйства и т.д., по-

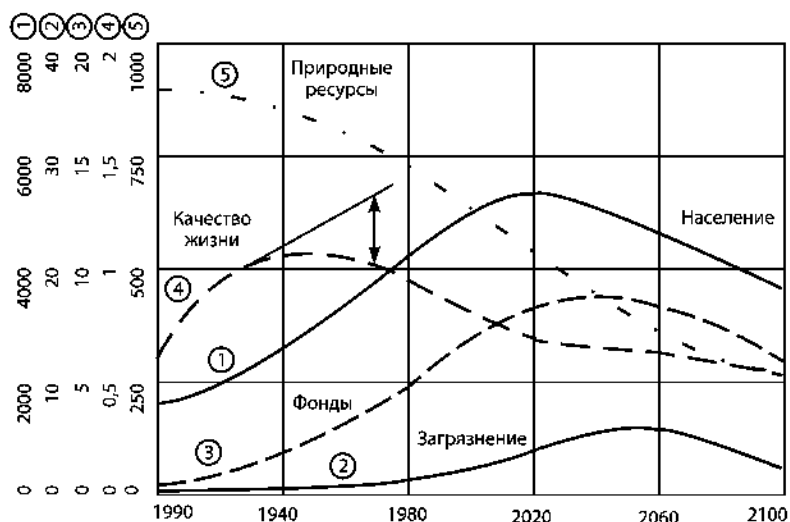


Рис. 1.2.7.3. Результаты первоначального варианта моделирования Дж. Форрестера

казал, что величина и время наступления спада незначительно изменялись, но тенденция общей деградации сохранилась.

На рис. 1.2.7.4 приведены результаты моделирования в случае, когда в 1970 г. происходит уменьшение скорости потребления ресурсов в 4 раза, т.е. соответствующее уравнение (1.2.7.5) принимает вид

$$dR/dt = -0,25R.$$

Считается, что технологии обеспечивают тот же уровень жизни при меньшем истощении невозполняемых природных ресурсов. Такое предположение приводит к кризису, связанному с загрязнением. Из-за сокращения потребления ресурсов их количество довольно велико для того, чтобы успели сильно вырасти численность населения, материальный уровень жизни и фонды, что приводит к резкому росту загрязнения. Такой парадоксальный вывод является следствием предположения о преемственности количества ресурсов. Максимум загрязнения к 2060 г. в 40 с лишним раз превышает стандартный уровень. Население достигает максимального значения в 2030 г., а затем в течение 20 лет резко падает до $\frac{1}{6}$ части этого значения.

Модель Дж. Форрестера не может точно предсказать количественные характеристики состояния мировой системы. Ее назначение — выявление общих качественных тенденций динамики основных переменных, анализ чувствительности результатов по отношению к различным заложенным в модель предположениям. При этом принципиально адекватное построение причинно-следственных связей системы.

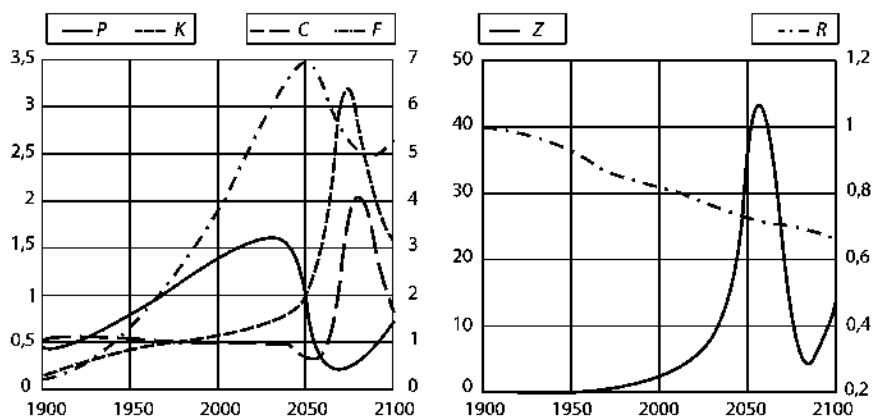


Рис. 1.2.7.4. Результаты моделирования в предположении о снижении в 1970 г. скорости потребления ресурсов в 4 раза

В начале XXI в. уже есть возможность сравнить прогнозные расчеты по модели Форрестера, сделанные в 70-х гг. XX в., с текущими показателями мировой динамики. Например, в 2000 г. реальная численность населения составила чуть больше 6 млрд человек, в то время как модель «Мир-2» предсказывала 5 млрд. Есть количественные отклонения, но при построении глобальной модели принципиально отслеживание тенденций поведения основных переменных системы.

Результаты моделирования показали наличие кризиса, связанного с истощением ресурсов и ростом загрязнения при сохранении современных тенденций. Форрестер считал, что избежать кризис можно, приводя систему к глобальному равновесию, когда переменные системы принимают в идеале стационарные значения и не меняются во времени.

Такая стабилизация в рамках модели недостижима, так как ресурсы могут только убывать и, следовательно, не могут стабилизироваться. Форрестер, понимая это, видел решение в регенерации отходов и применении заменителей природных ресурсов [1.16]. Для остальных переменных можно добиться приближения к стационарным значениям на рассматриваемом промежутке времени (с 1970 по 2100 г.). Далее снова происходит деградация системы.

На рис. 1.2.7.5 приводятся результаты моделирования при следующих ограничениях, вводимых с 1970 г.:

- темп потребления ресурсов уменьшен вчетверо по сравнению с 1970 г.;
- генерация загрязнения уменьшена вдвое;
- фондообразование уменьшено на 40%;
- производство продуктов питания уменьшено на 20%;

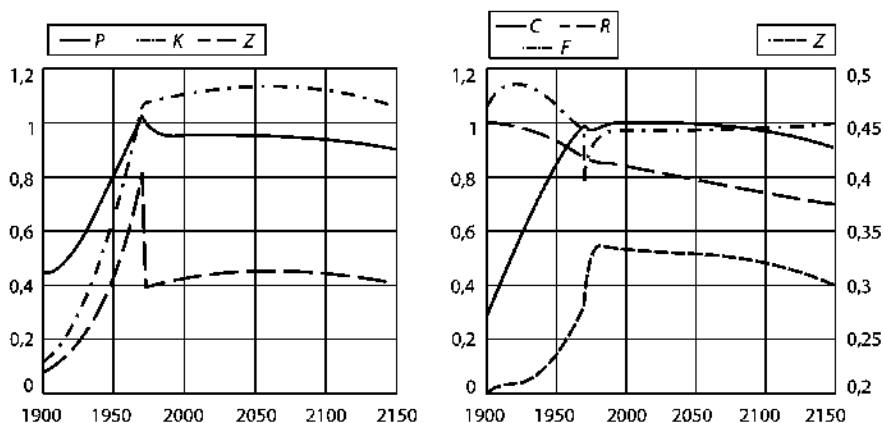


Рис. 1.2.7.5. Модель Дж. Форрестера при дополнительных ограничениях

- темп рождаемости уменьшен на 30%.

Основные параметры стабилизируются до конца XXI в., после чего истощение ресурсов все-таки вызывает кризис. Чтобы это проиллюстрировать, динамика переменных показана до 2150 г.

Подчеркнем, что кризис рассматривается в рамках данной модели. Соответствие модели реальности в рамках количественной точности — сложнейшая задача даже для гораздо более простых систем.

Методология Форрестера иллюстрирует построение динамических моделей сложных нелинейных систем. Она дала начало целому направлению последующих работ, получившему название глобального моделирования. Нельзя не учитывать и ограниченность модели: не учитывается много факторов, которые могут стать значимыми при некоторых изменившихся условиях.

Разработка глобальной модели была продолжена учеником Форрестера Д. Медоузом, построившим более подробную модель «Мир-3». Поведение системы в уточненной модели качественно очень похоже на поведение модели «Мир-2». Обнаружена деградация по причине истощения ресурсов и чрезмерного роста загрязнения.

Развитие глобального моделирования по направлению все большей детализации имеет два аспекта: с одной стороны, возможно учесть дополнительные факторы; с другой стороны, неясно, как достоверно определять связи между многочисленными компонентами модели. Медоуз признавал, что обладал всего лишь 0,1% необходимой информации. Усложнение модели Медоуза привело к тому, что ее идентификация еще более затруднилась (поскольку количество параметров модели увеличилось почти в три раза). То, что результаты качественно близки, объясняется тем, что основные характеристики модели сохранились. Усложнение модели, проведенное Медоузом, не привело к качественным изменениям.

По пути усложнений и детализации моделей двигались и другие исследователи [1.18, 4.20].

В подавляющем большинстве случаев эти модели весьма громоздки, количество переменных и параметров в них может достигать порядка сотен. Такие сверхсложные модели трудно верифицировать, корректировать в соответствии с происходящими изменениями, в них трудно выделить определяющие факторы. С ростом сложности модели происходит переход количественных изменений в качественные — сложность модели затмевает возможность исследования качественных тенденций, а ведь именно для исследования качественных результатов такие модели и разрабатываются.

Относительно простые модели не могут обеспечить количественную точность предсказаний ввиду небольшого набора факторов. Естественно стремление исследователей учесть как можно больше факторов, чтобы адекватно описать реальное поведение такой сложной

модели, как мировая система. Но при этом значительно возрастают трудности идентификации больших моделей, так как для таких систем часто известны не количественные характеристики протекающих процессов, а качественное поведение. Исследование Форрестера и его последователей показало серьезную ограниченность существующих методов прогноза мировой динамики. Глобальные задачи, которые ставились при построении большинства моделей, не могли быть решены применяемыми средствами с количественной точностью. При этом в моделях сложно учитывать возможные кардинальные изменения в системах — технологические прорывы, бифуркации состояний, эффекты самоорганизации, конкуренции, зарождение новых режимов.

В исследованиях тенденций мировой динамики приходится использовать прежде всего наглядные и простые модели.

Влияние на массовое сознание и на политиков произвели не только первые глобальные модели Дж. Форрестера, но и моделирование «ядерной зимы» Н.Н. Моисеевым и его сотрудниками. Результатом этого моделирования стала очевидная невозможность массового применения ядерного оружия.

1.2.8. ОБОБЩЕННАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Примем за модель-прототип модель динамики валового продукта (1.2.3.1) и рассмотрим ее подробнее. Эта модель привлекательна тем, что по форме она близка к модели (1.2.3.2) — классической модели теории колебаний. Именно для этой линейной модели и ее нелинейных обобщений в теории колебаний получены многочисленные результаты, ставшие основополагающими для различных направлений динамического моделирования. Модель (1.2.3.1) является линейной моделью. Кроме того, при определении нормы накопления s остается неясным вопрос о предельной величине оттока капитала из депрессивной экономики.

В связи с этим для моделирования динамики валового продукта рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$m(x, t) \frac{d^2 x}{dt^2} + B \left(\frac{dx}{dt} \right) + C(x) = F(t). \quad (1.2.8.1)$$

Здесь частично изменены введенные автором [1.11] обозначения: $x(t)$ — совокупный общественный продукт; t — непрерывное время; $F(t)$ — совокупный объем инвестиций, который имеет положительный знак, если инвестиции вкладываются в экономику, и отрицательный, если инвестиции изымаются из экономики (отток капита-

ла); зависимость $m(x, t)$ — мера инерции хозяйственной системы; функция $B(dx/dt)$ — мера сопротивления переменам, происходящим под действием инвестиций $F(t)$; функция $C(x)$ — функция накопления. Ее экономический смысл можно выяснить, рассмотрев хронически депрессивное состояние экономики, когда $d^2x/dt^2 = dx/dt = 0$. Получаем $C(x) = F(t)$, т.е. функция $C(x)$ отражает отток капитала из экономики при $C(x) < 0$ и приток капитала при $C(x) > 0$. Зависимости $m(x, t)$, функции $B(dx/dt)$ и $C(x)$ могут определяться статистическими методами по данным предшествующей динамики экономической системы.

Определение меры инерции системы может проводиться следующим образом. Из статистических данных выделяются зависимости $x(t)$ и $F(t)$, с помощью численных методов вычисляется вторая производная $d^2x(t)/dt^2$, после этого мера инерции системы может быть вычислена как $m(x, t) = F(t) / (d^2x(t)/dt^2)$.

Определение меры сопротивления переменам $B(dx/dt)$ проводится аналогично. По известной зависимости $x(t)$ определяется первая производная $dx(t)/dt$, затем таблично формируется зависимость $B(dx/dt) = F(t)$ в выделенные моменты времени t . В частном случае, когда мера сопротивления пропорциональна скорости изменений, т.е. $B(dx/dt) = b(x, t) dx/dt$, получаем $b(x, t) = F(t)/(dx/dt)$.

В частном случае при $m(x, t) = \text{const}$, $B(dx/dt) = b dx/dt$ ($b = \text{const}$), $C(x) = -cx$ ($c = \text{const}$), $F(t) = f$ получаем с точностью до обозначений линейную модель (1.2.3.1).

Не ограничивая общности, будем считать, что $m = \text{const}$, $B(dx/dt) = b dx/dt$ (где $b = \text{const}$), $C(x) = cx + \gamma x^3$; получаем модель вида

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx + \gamma x^3 = F(t). \quad (1.2.8.2)$$

В случае $F(t) = W \sin(\omega t)$ приходим к классическому уравнению Дюффинга:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx + \gamma x^3 = W \sin(\omega t). \quad (1.2.8.3)$$

В этом уравнении при $c > 0$ в случае существенной нелинейности наряду с решениями традиционного вида были обнаружены сложнейшие периодические решения [1.20], при $c < 0$ — странный аттрактор [1.21].

В механике уравнение Дюффинга (1.2.8.3) соответствует вынужденным колебаниям сосредоточенной массы m на пружинке с нели-

нейной жесткостью $cx + \gamma x^3$ под действием внешней силы $W\sin(\omega t)$ при наличии силы сопротивления $b dx/dt$, пропорциональной скорости. Функция $x(t)$ при этом трактуется как координата — отклонение груза от положения равновесия. Модель (1.2.8.1) и ее частный случай модель (1.2.8.2) построены как модели экономической динамики. Если в экономической динамике рассмотреть периодические инвестиции $F(t) = W\sin(\omega t)$, приходим к тому же уравнению Дюффинга (1.2.8.3).

Выясним еще некоторые аналогии между этими двумя различными приложениями, сводящимися к одной модели (1.2.8.3). Для этого рассмотрим соответствующую (1.2.8.1) или, в частном случае, (1.2.8.3) консервативную систему:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + C(x) = 0. \quad (1.2.8.4)$$

В механике эта модель соответствует колебаниям груза на нелинейной пружине жесткости $C(x)$. Внешние воздействия и сила сопротивления отсутствуют. Такая система называется консервативной, рассматриваемые колебания называются собственными нелинейными колебаниями. Полная энергия E этой консервативной системы складывается как сумма кинетической энергии

$$E_{kin} = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (1.2.8.5)$$

и потенциальной энергии

$$E_{pot} = - \int C(x) dx. \quad (1.2.8.6)$$

$$E = E_{kin} + E_{pot} \quad (1.2.8.7)$$

Потенциальная энергия определяется с точностью до константы. Кинетическая энергия всегда неотрицательна. Из (1.2.8.6) следует, что

$$C(x) = -dE_{pot}/dx. \quad (1.2.8.8)$$

Вводится также потенциальная функция $\Pi(x)$ таким образом, чтобы

$$C(x) = d\Pi(x)/dx. \quad (1.2.8.9)$$

В нашем случае потенциальная функция с точностью до знака совпадает с потенциальной энергией. В консервативной системе

полная энергия сохраняется: отсутствует «подкачка» энергии со стороны внешнего воздействия и отсутствует диссипация энергии.

Применительно к модели экономической системы эквивалентом кинетической энергии является половина произведения меры инертности экономической системы m на квадрат скорости изменения совокупного общественного продукта. Эквивалентом потенциальной функции $P(W)$ является интеграл от функции накопления.

1.2.9. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ПОСТРОЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Алгоритм построения математической модели включает много этапов и является итерационным (рис. 1.2.9.1). Формально приведенная схема построения математической модели охватывает широкий спектр приложений — от естественнонаучных до социально-экономических систем. Разработка любой математической модели начинается с потребности, которая может выражаться в различных формах — от необходимости рассчитать конструкцию и стоимость постройки крыльца на даче до моделирования последствий масштабных крупных хозяйственных, экономических или законодательных нововведений. Эта потребность формулируется, как правило, в вербальном или текстовом виде и не техническими специалистами, а руководителями соответствующего уровня — от домохозяйства до международных организаций. После этого привлекаются специалисты соответствующей отрасли для содержательной постановки задачи.

Одним из ответственных этапов является *выделение значимых факторов*, принимаемых во внимание при дальнейшей разработке математической модели, и *отбрасывание малозначимых факторов*, которые не будут учитываться в расчетах. Ошибка на этом этапе весьма критична, исправление ее приводит, как правило, к кардинальной переработке модели. Поэтому на этом этапе привлекаются наиболее квалифицированные специалисты в соответствующих областях — от области конкретных приложений до математиков и программистов.

После этого проводятся *анализ и корректировка принятых гипотез* о выделенных значимых факторах, участвующих в дальнейшей разработке модели.

На следующем этапе разработки математической модели проводится *построение зависимости между основными переменными*, включаемыми в модель. Для некоторых естественнонаучных приложений этот этап является чисто техническим. В экономике часто этот этап является принципиальным, требующим дополнительных исследо-

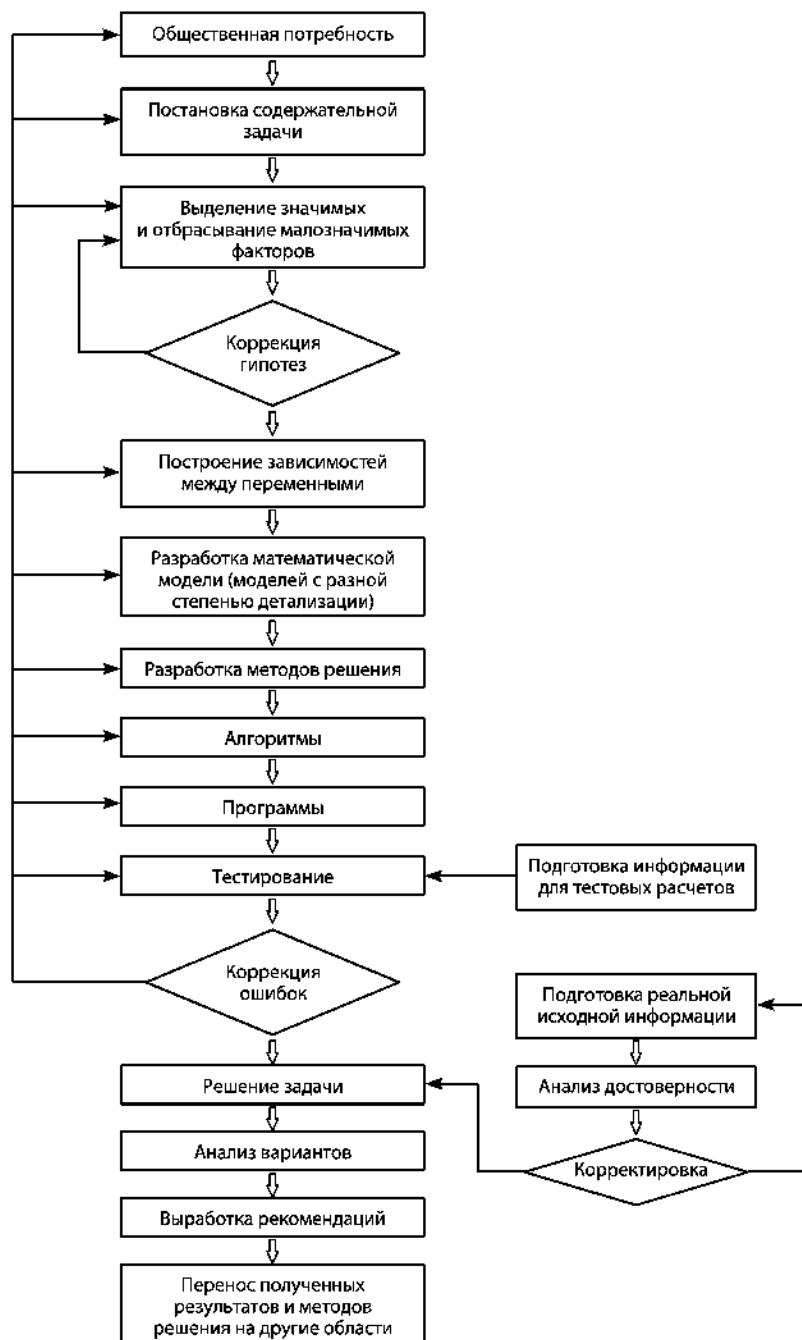


Рис. 1.2.9.1. Алгоритм построения математической модели

ваний. В крупных организациях, занимающихся математическим и экономико-математическим моделированием в широком понимании этого термина, реализацией этого этапа занимаются аналитические отделы, разрабатывающие рекомендации о структуре модели, составе и взаимосвязях данных, значимых и незначимых факторах.

Следующий этап — *разработка математических моделей* с разной степенью детализации — область применения математических методов и моделей. При этом часто применяемые модели и методы являются универсальными, используемыми для моделирования в различных областях знания. Для поэтапного анализа применяется разная степень детализации — на первых стадиях используются менее точные модели, допускающие относительно быстрое получение решения, а в дальнейшем — более точные модели.

Этапы методов решения, алгоритмов и программ выполняются специалистами прикладной и вычислительной математики, программистами. Специальность «прикладная математика» появилась в середине 60-х гг. XX в. для преодоления разрыва в знаниях и взаимного непонимания, возникшего в то время между техническими специалистами прикладных областей, «чистыми» математиками и программистами. Прикладная математика включает в себя большую часть цикла построения математической модели — от постановки содержательной задачи до решения задачи, анализа вариантов, выработки рекомендаций. Традиционно эта специальность ориентируется на естественно-научные приложения. В области экономики подобный широкий подход практиковался в экономической кибернетике. В настоящее время происходит взаимное сближение этих направлений и многие модели и методы, разрабатывавшиеся для одних областей, находят свое применение в совершенно других направлениях.

Методы решения, алгоритмы и программы, являвшиеся в начале применения компьютеров в математическом моделировании самостоятельными и весьма сложными этапами, в настоящее время во многих вариантах стали стандартными и включены в распространенные пакеты программ, используемые в математическом моделировании. Эти этапы разрабатываются индивидуально для сложных и уникальных моделей; для моделей простого и среднего уровня часто достаточно стандартных методов решения, алгоритмов и программ, включенных в распространенные пакеты.

На любом этапе построения математической модели возможно появление ошибок разного уровня — от принципиальных до небольших технических неточностей. Для отыскания и исправления ошибок предусмотрен *процесс тестирования*. Он может быть многоуровневым, предусматривающим различные стадии. В программном продукте, соответствующем достаточно сложной модели, присутствуют тысячи обнаруженных в процессе эксплуатации различных

ошибок и несоответствий — от легко исправимых ошибок программирования до принципиальных несоответствий модели реальной ситуации. Дополнительную сложность вносит изменение внешних условий, для которых разрабатывалась модель. Например, в экономических приложениях крайне болезненным может оказаться изменение действующих нормативных актов, касающихся разрабатываемой модели. Для минимизации отрицательных последствий ошибок разного уровня при реальном использовании модели разработчики модели и программного продукта поддерживают работу горячей линии, которая систематизирует работу по исправлению ошибок и доработке модели и программ при изменении внешних условий.

Обнаруженные ошибки направляются на исправление разработчикам соответствующих этапов. В наиболее тяжелых вариантах может быть принято решение о нереализуемости модели на данном уровне развития или о кардинальных изменениях в содержательной постановке задачи.

Используемые при тестировании исходные данные соответствуют, как правило, задаче, решение которой известно из каких-то других источников. В естественнонаучных и технических приложениях такими тестами являются задачи, имеющие аналитическое решение, задачи, решенные ранее другими методами, результаты натурных экспериментов. В области экономики и социально-экономических исследований подбор исходных данных для тестирования работы модели, алгоритмов и программ часто оказывается самостоятельной сложной задачей.

Параллельно со всеми предшествующими этапами проводится подготовка исходных данных для расчета *конкретных вариантов* анализируемого объекта или процесса. Подготовка исходных данных в естественнонаучных и технических приложениях, как правило, является четко реализуемой задачей, данные обладают достаточной достоверностью и точностью. В области экономики и социально-экономических исследований подготовка исходных данных является самостоятельной трудной задачей, часто требуется дополнительный анализ точности и достоверности таких данных.

После завершения этапа тестирования проводятся расчеты конкретных вариантов, для анализа которых создаются математическая модель и программное обеспечение. На основе анализа вариантов производится *выработка рекомендаций*.

Часто получается так, что разработанные для построения математической модели подходы, алгоритмы, программы могут быть использованы в других областях знания.

Построение моделей экономических и социально-экономических систем существенно отличается от построения моделей систем в естественнонаучных и технических приложениях (табл. 1.2.9.1).

Таблица 1.2.9.1

**Основные отличия в разработке математических моделей
естественнонаучных и технических приложений и моделей экономических
и социально экономических систем**

<i>Этап алгоритма построения математической модели</i>	<i>Для естественнонаучных и технических приложений</i>	<i>Для экономических и социально-экономических приложений</i>
Общественная потребность	Формируется на базе предшествующих достижений с учетом технической и экономической реализуемости	Формируется и формулируется по разным мотивам — от исследовательских до политических
Постановка содержательной задачи	Формулируется, как правило, как развитие модели-прототипа, на этом этапе частично анализируется реализуемость модели, сфера применимости и достоверность результатов	Более широкие границы задачи, на этом этапе сложно иногда оценить реализуемость, сферу применимости и достоверность результатов
Выделение значимых и отбрасывание малозначимых факторов	Используется информация модели-прототипа, натурных экспериментов, опыт разработчиков	Сложность системы определяет сложность выделения значимых и отбрасывания малозначимых факторов
Построение зависимостей между переменными	Определяется содержательной постановкой задачи и дополняется экспериментальными данными	Является самостоятельной сложной задачей
Разработка математической модели с разной степенью детализации	Используется аппарат математического моделирования	Используется аппарат математического моделирования с учетом большей сложности системы и неопределенности функционирования
Разработка методов решения, алгоритмы, программы	Соответствуют модели	Соответствуют модели
Подготовка информации для тестовых расчетов	Используются результаты модели-прототипа, альтернативных методов расчета, данные натурных экспериментов	Сложности в получении достоверных данных для тестовых расчетов
Тестирование	В основном объективный процесс отыскания и устранения ошибок всех уровней	Возможно влияние внешних факторов на признание ошибочных результатов и неприятие корректных расчетов
Подготовка реальной исходной информации	Используются данные натурных экспериментов, объективных исследований	Сложные процедуры подготовки исходной информации для экономических и социально-экономических моделей. Возможно влияние внешних факторов на «улучшение» исходной информации

<i>Этап алгоритма построения математической модели</i>	<i>Для естественнонаучных и технических приложений</i>	<i>Для экономических и социально-экономических приложений</i>
Анализ достоверности исходной информации	Относительно высокая достоверность исходной информации	Достоверность исходной информации требует дополнительного подтверждения
Решение задачи	Расчет различных вариантов	Расчет различных вариантов
Анализ вариантов	Объективное сравнение результатов	Возможно внешнее влияние на оценку результатов
Выработка рекомендаций	Рекомендации, основанные на анализе вариантов	Рекомендации, основанные на анализе вариантов. Возможно влияние внешних факторов
Перенос полученных результатов и методов решения на другие отрасли	Взаимное проникновение методов и моделей. Возникновение эконофизики, математической экономики, экономической кибернетики, синергетической экономики	Взаимное проникновение методов и моделей. Возникновение эконофизики, математической экономики, экономической кибернетики, синергетической экономики

Рассмотрев примеры построения моделей экономической динамики на основе обыкновенных дифференциальных уравнений, мы видим, что использование линейных моделей приводит, как правило, к результатам, включающим экспоненциально растущие функции времени. Как следствие, применение таких моделей возможно лишь на ограниченных отрезках времени. Появление линейных моделей в экономике, как и в других областях науки, естественным образом обусловлено историей развития моделирования. На первых этапах аналитическое исследование было единственно возможным методом анализа, для линейных дифференциальных уравнений разработан соответствующий математический аппарат; и совершенно естественно, что именно линейные модели стали первыми моделями экономической динамики. Вообще говоря, процедура линеаризации процесса есть естественная процедура на начальных стадиях моделирования и в экономике, и в других отраслях знания.

Однако ограниченность области применения линейных моделей привела к необходимости учета в модели нелинейных зависимостей. И нелинейные модели, и методы их анализа стали разрабатываться еще до появления компьютеров. Квазилинейные модели (в которых нелинейные слагаемые малы по сравнению с линейными) появились в конце XIX в. Метод малого параметра разработан А. Пуанкаре в тот же период. С появлением компьютеров стало возможным проводить численное исследование существенно нелинейных систем дифференциальных уравнений, образующих модели различных процессов в естественнонаучных приложениях, а позднее и в экономике.

Появление компьютеров и численных методов анализа и построения решений систем нелинейных дифференциальных уравнений позволило разрабатывать математические модели с учетом реальных нелинейных свойств моделируемого процесса. В естественнонаучных направлениях эти нелинейные свойства, как правило, однозначно определяются параметрами моделируемого процесса.

Приведем примеры из школьного курса физики. Например, нелинейная зависимость усилия в пружине от перемещения с необходимой точностью измеряется физическими приборами. При построении модели колебаний математического маятника нелинейные свойства учитываются (и не отбрасываются!) при выписывании уравнения движения $d^2x(t)/dt^2 + \omega_0^2 \sin(x(t)) = 0$. Ради единообразия здесь обозначено: $x(t)$ — отклонение от положения равновесия (в литературе для этого параметра часто встречается обозначение $\phi(t)$), ω_0 — частота малых (линейных!) собственных колебаний около положения равновесия. Это уравнение существенно нелинейное — неизвестная функция $x(t)$ входит в уравнение как аргумент функции $\sin(x(t))$. Вид этой нелинейности полностью определен объективными факторами — направлением вектора силы притяжения Земли, углом отклонения нити маятника от вертикального положения. Величина частоты малых колебаний однозначно определяется массой груза и величиной ускорения свободного падения. В постановке этой существенно нелинейной задачи нет никаких элементов субъективизма — все параметры модели однозначно определяются по данным моделируемого процесса колебаний. Исходная нелинейная модель полностью содержит и линейные процессы; в школьном курсе физики эти модели линеаризуются, чтобы получить аналитическое решение (подробнее эти вопросы обсуждаются в пункте, посвященном методам решения линейных, квазилинейных и существенно нелинейных динамических задач).

Гораздо сложнее построение динамической модели экономического процесса. Выделим важнейшие проблемы, возникающие при построении моделей экономической динамики.

Первая из них — выделение значимых факторов и отбрасывание малозначимых. Для модели математического маятника очевидно, что неучитываемая в модели сила сопротивления воздуха может внести некоторую погрешность в результаты моделирования, вращение Земли тоже может оказать некоторое влияние, а вот притяжение дальних планет вряд ли окажет существенное влияние на точность моделирования. В экономике эта проблема гораздо сложнее. Некоторые малозначимые факторы в определенных условиях могут стать решающими. Решение этой проблемы не поддается алгоритмизации, все определяется квалификацией и, быть может, интуицией исследователя.

Вторая важная проблема построения моделей экономической динамики — вид зависимости между различными переменными. В естественнонаучных направлениях зависимости между переменными определяются, как правило, постановкой задачи ($\sin(x(t))$ в приведенном примере). В экономике эти зависимости вводятся либо из каких-то дополнительных соображений, либо по данным предварительного статистического анализа.

Третья проблема построения моделей экономической динамики на основе обыкновенных дифференциальных уравнений — определение коэффициентов уравнений и взаимозависимостей основных переменных и внешних воздействий. В естественнонаучных дисциплинах коэффициенты, как правило, также определяются постановкой задачи (ω_0 в приведенном примере). В экономике эти коэффициенты определяются не так однозначно и для их определения приходится проводить дополнительные исследования.

Для решения отмеченных проблем определения функциональных зависимостей и величины коэффициентов в моделях нелинейной экономической динамики можно использовать следующий подход. Основным аппаратом исследования становятся численные методы. При их использовании принципиально неважны конкретный вид функциональных зависимостей и величина коэффициентов (в этом случае они также могут быть известными функциями каких-то переменных). И зависимости, и коэффициенты принципиально могут определяться по статистическим отчетным данным. Естественным образом отпадает вопрос о виде зависимости — она принимается такой, какая определяется по реальным данным. Если она близка к квадратичной, кубической или какой-либо другой общепринятой зависимости — задача упрощается. Если же реальные зависимости не могут быть с приемлемой погрешностью аппроксимированы стандартными функциями, то в качестве промежуточного вспомогательного средства на этом этапе могут быть использованы различные методы аппроксимации, например сплайны. С точки зрения численной реализации это явится незначительным усложнением алгоритма.

Такой подход представляется наиболее перспективным для применения методов моделирования, развитых в теории нелинейных колебаний, синергетике, теории катастроф, к анализу задач нелинейной экономической динамики.

Если говорить о моделях прогнозирования экономической динамики, то для определения функциональных зависимостей и, быть может, некоторых коэффициентов приходится экстраполировать определяемые по данным реальной экономики на прошедших этапах зависимости на будущие периоды. При этом в будущем, возможно, появятся новые факторы, существенно влияющие на экономическую

ситуацию. Некоторые ранее малозначимые факторы могут приобрести гораздо большее значение; некоторые весьма существенные в текущем и прошлом состоянии системы факторы в будущем могут ослабить свое влияние на поведение системы. Таким образом, задача построения прогнозной модели поведения экономической системы является трудно формализуемой. Многое в такой модели зависит от субъективной экстраполяции на будущие периоды взаимозависимостей компонентов модели. Построение такого рода прогнозных моделей рассматривается в работе А.А. Кутаенко и П.Е. Кондрашова [1.19].

Используя общий методологический подход, мы в некоторых случаях будем использовать терминологию, принятую в теории колебаний, синергетике, теории катастроф, при обсуждении общих динамических моделей, включающих и модели экономической динамики.

1.2.10. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЭКОНОМИКЕ С УЧЕТОМ КРИЗИСОВ

Мировой экономический кризис 2008 г., помимо сложнейших экономических проблем, вызвал ряд вопросов о возможности предсказания таких явлений, в частности почему существующие модели экономического развития не отразили предкризисную ситуацию в глобальной экономике. Большое разочарование вызвало отсутствие достоверного количественного анализа предкризисного состояния экономики [1.51]. Подходы на основе нелинейной динамики позволяют строить обозримые модели процессов с учетом предкризисных и кризисных явлений. При этом с предкризисными явлениями связывается усложнение характера динамического процесса (например, приближение параметра системы к точке бифуркации, появление сложных полигармонических решений — осцилляций), а с кризисными — качественные изменения в характере движения (потеря устойчивости, бифуркации, переход к динамическому хаосу в детерминированных системах и т.д.). В естественнонаучных и технических приложениях упомянутые подходы доказали свою применимость, с их помощью успешно рассчитываются динамические режимы и возможно не только качественное, но и количественное определение параметров системы, при которых происходят предкризисные и кризисные явления.

По отношению к экономическим системам такой определенности не достигнуто. Среди факторов, которые определили отсутствие количественного предсказания глобального экономического кризиса, выделим следующие:

1) комплексный характер экономической системы по сравнению с естественнонаучными и техническими, огромная роль в экономике «человеческого фактора», который сложно учесть при построении модели;

2) использование в основе многих классических экономических моделей «гипотез идеальных рынков». Рассмотрим основные из этих гипотез. Многие существующие модели экономики базируются на понятии идеального, или совершенного, рынка капитала (*perfect or frictionless market*). Заметим, что термин «*frictionless*» дословно переводится как «малое трение, отсутствие трения». Здесь нельзя не отметить, что трение, сопротивление внешним воздействиям или, в более общем варианте, диссипация энергии в моделях естественнонаучных приложений учитываются уже несколько сот лет.

Гипотеза 1 — отсутствие транзакционных издержек. Для крупного бизнеса транзакционные издержки могут составлять незначительную часть расходов, и эта гипотеза может быть использована для построения соответствующих моделей. Естественно, область применимости этих моделей ограничивается именно зоной экономических показателей, где транзакционные издержки несут незначительный вес. При этом граница применимости модели не может быть численно определена, так как транзакционные издержки в принципе в модели не участвуют.

Гипотеза 2 — отсутствие налогов. Комментарии по поводу такой гипотезы более уместны в книгах по юриспруденции. Заметим, что эта гипотеза используется далеко не во всех моделях.

Гипотеза 3 — наличие столь большого числа покупателей и продавцов, что действия отдельных из них не влияют на цену финансовых инструментов. Реально крупные игроки существенно влияют на ситуацию на рынке. Центральные банки должным образом участвуют в торгах для регулирования курсов валют. Действия отдельного крупного игрока существенным образом не только влияют на цену финансовых инструментов, но и формируют ожидания остальных участников рынка и тенденции изменения ситуации. Таким образом, область применимости этой гипотезы очень ограничена. Эта гипотеза в какой-то мере справедлива только для финансовых инструментов с большим числом покупателей и продавцов при отсутствии участия в торгах крупных игроков.

Гипотеза 4 — равный доступ на рынок юридических и физических лиц. Казалось бы, с развитием технических средств эта гипотеза становится все более справедливой, однако крупные игроки имеют более высокий приоритет при совершении сделки.

Гипотеза 5 — отсутствие издержек информационного обеспечения и равнодоступность информации. Технически в последнее время это реализовано в полном объеме, но главный аспект в этой пробле-

ме не технический, а именно информационный. Держатели инсайдерской информации имеют возможность совершать необходимые действия, до того как эта информация становится общедоступной. В средствах массовой информации регулярно появляются сообщения об использовании инсайдерской информации в корыстных целях. Итак, на практике эта гипотеза не подтверждается.

Гипотеза 6 — одинаковые ожидания у всех действующих лиц. Действительно, эффект синхронизации ярко проявляется в экономических системах, однако и здесь инсайдерская информация может служить тем самым фактором, который делает применение этой гипотезы весьма проблематичным.

Гипотеза 7 — отсутствие издержек финансовых затруднений: любой игрок может занять необходимые ему финансовые ресурсы под общедоступную процентную ставку или разместить временно свободные средства под ту же процентную ставку. Очевидно, что в реальности эта гипотеза не выполняется.

Использование перечисленных гипотез чрезмерно упрощает модель и приводит к «идеальным» тривиальным результатам, в которых в принципе невозможно учесть кризисные явления;

3) сложность получения достоверных исходных данных и параметров экономической модели;

4) существующая целевая функция мировой экономики — рост потребления — вступает в противоречие с естественными ограничениями на потребление ресурсов, и происходит игнорирование и замалчивание этого противоречия.

На рис. 1.2.10.1 приведены некоторые из кривых Торнквиста, характеризующие спрос на ту или иную группу товаров в зависимости от уровня дохода потребителя.

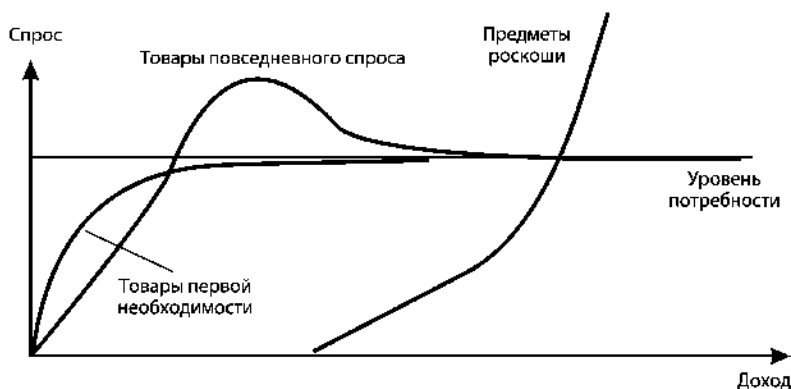


Рис. 1.2.10.1. Зависимость спроса от дохода для различных групп товаров

Видно, что товары первой необходимости с ростом дохода выходят на горизонтальную асимптоту, соответствующую уровню потребности. Действительно, даже самые обеспеченные люди не потребляют поваренную соль в количестве, превышающем естественную потребность. Кривая товаров повседневного спроса для людей небольшого дохода имеет явно выраженный максимум, превышающий уровень потребности. Люди с небольшим доходом склонны к излишнему потреблению предметов повседневного спроса. В развитых странах представители именно этой группы населения часто страдают от излишнего веса, в то время как обеспеченные люди в этих странах гораздо реже склонны к полноте. (Естественно, мы не рассматриваем экономику экстремально бедных стран, где проблемы массового голода или катастрофической нехватки пресной воды становятся доминирующими экономическими стимулами. Применительно к таким странам кощунственно обсуждать проблемы лишнего веса.)

Кривая зависимости спроса на предметы роскоши от доходов потребителей особая. Она не определена в зоне небольших доходов, так как бессмысленно обсуждать спрос на предметы роскоши потребителей с небольшим доходом. Но с ростом доходов кривая спроса на предметы роскоши стремится к бесконечности. Примеры такого потребления постоянно попадают в средства массовой информации — мобильные телефоны стоимостью более миллиона евро, золотые унитазы, очередь на новейшие персональные самолеты, в серийном варианте вмещающие сотни пассажиров, и т.д. Такое поведение потребителей с высоким доходом породило серию анекдотов про «новых русских» и других «новых...». Заметим, что «новых русских» по времени опередили представители нефтедобывающих стран, которые в очень короткий временной промежуток кардинально изменили уровень дохода от очень небольшого (до начала массовой добычи нефти в этих странах) до экстремально высокого в период расцвета нефтяного бума. По-видимому, существует некоторая закономерность в формировании завышенного уровня потребления при резком росте доходов потребителя. Спрос порождает предложение — сформировались целые отрасли экономики, ориентированные на удовлетворение запросов этой группы потребителей. Впрочем, существуют противоположные примеры рационального потребления со стороны экстремально богатых людей. Билл Гейтс — основатель и совладелец компании *Microsoft* — в течение многих лет самый богатый человек мира, Ингвар Кампрад — основатель и совладелец компании *IKEA*, входящий в число самых богатых людей мира, и многие другие далеко не бедные люди известны своей скромностью в бытовом потреблении.

Целевой функцией деятельности экономической системы является рост производства и потребления. Но редко детализируется, какого рода товары и услуги принимаются во внимание: рост производства товаров первой необходимости или рост производства предметов роскоши? Часто используются обобщенные макроэкономические показатели, например валовой внутренний продукт (ВВП), многие другие экономические индикаторы. В большинстве из них не выделяются группы товаров и услуг — от жизненно необходимых до изысканно бесполезных. Итак, еще одна неопределенность в моделировании динамики экономических систем — о какой, собственно, экономике идет речь? О реальной экономике производства и потребления рациональных продуктов и услуг или о «лакшери» (*luxury*)-экономике? Сложно провести четкую границу между этими составляющими. Многие товары и услуги, появившись в сегменте предметов роскоши (например, автомобиль), со временем переходят в группу товаров повседневного спроса. Заметим, что в кризисных условиях в первую очередь снижается потребление, а вслед за ним и производство предметов роскоши. Экономика товаров первой необходимости более устойчива по отношению к кризисам. Причиной экономического кризиса в XVII в. в Голландии стало падение цен на тюльпаны. Эти цветы некоторое время являлись средством инвестирования и спекуляций, стоимость цветов во много раз превышала реально необходимые затраты на их выращивание. Причиной мирового экономического кризиса 1929 г. стала паника на рынке пенных бумаг, которые также явились средством инвестирования и спекуляций. Конкретной причиной мирового экономического кризиса 2008 г. считается начавшийся годом ранее кризис ипотечной системы США и связанной с ней части финансовой системы. Еще одним глобальным фактором риска, который может стать причиной следующего мирового финансового и экономического кризиса, является доминирующая роль в мировых финансах доллара США и отсутствие четкой привязки эмиссии долларов к ВВП страны и мира. Итак, уровень сложности экономической системы практически исключает использование простых линейных моделей для анализа поведения такой системы в нестабильных условиях.

Выделим четыре уровня сложности системы — от относительно простых систем небольшой размерности до социально-экономических. Выделим также четыре уровня сложности динамических моделей — от простых линейных моделей до синергетики и теории катастроф (табл. 1.2.10.1).

Анализируя табл. 1.2.10.1, можно ожидать, что предкризисные и кризисные явления в экономике могут быть рассчитаны и предсказаны с помощью существенно нелинейных динамических моделей обозримой размерности, синергетики, теории катастроф.

Таблица 1.2.10.1

Ожидаемые результаты моделирования в зависимости от уровня сложности системы и модели

<i>Уровень сложности системы. Уровень сложности модели</i>	<i>Естественнонаучная и техническая система небольшой размерности</i>	<i>Сложная система (метеорология)</i>	<i>Экономика</i>	<i>Социально-экономическая система</i>
Простые линейные модели	Резонанс	Крайне узкая применимость	Экспоненциальный рост показателей. Ограниченность применения	Экспоненциальный рост показателей. Ограниченность применения
Квазилинейные модели	Потеря устойчивости. Бифуркации. Синхронизация	Некоторые нелинейные эффекты	Некоторые нелинейные эффекты	Некоторые нелинейные эффекты
Существенно нелинейные модели небольшой размерности	Разнообразные нелинейные эффекты. Детерминированный хаос	Странный аттрактор. Эффект бабочки	Осцилляции показателей около тренда. Потеря устойчивости тренда как экономический кризис	Эффект толпы как кризисное проявление синхронизации
Синергетика. Теория катастроф	Теория самоорганизации	Смерч как потеря устойчивости ламинарного течения	Эконофизика. Синергетическая экономика	Упорядоченное развитие, уровень свобод как мера диссипации системы, хаос и порядок

В классической модели мировой динамики Дж. Форрестера (1970) кризис рассматривался как относительно плавное (в течение нескольких лет) достижение экстремума и дальнейшее снижение основных экономических показателей (население, основные фонды и др.). Это понятие кризиса относится к глобальным, абсолютно необходимым для выживания человечества элементам экономики. Финансовые спекулятивные составляющие, экономика предметов роскоши в модели Форрестера не учитываются как глобально незначимые элементы.

Развитие современного экономического кризиса, затронувшего другие параметры глобальной экономики, происходит гораздо быстрее. При этом реальные макроэкономические показатели проявляют свойства, присущие решениям нелинейных динамических моделей, осцилляции около тренда, предкризисное усиление осцилляций, потерю устойчивости тренда как проявление кризиса, переход эко-

номики в новое устойчивое состояние как бифуркация, дальнейшее развитие этого состояния как выход из кризиса.

Отметим еще один аспект, отличающий построение моделей экономической и социально-экономической системы от построения моделей естественнонаучных приложений. В естественнонаучных приложениях внешнее воздействие достаточно определенно вызывает конкретный результат в поведении системы, и это относительно просто включается в модель. В экономике внешнее воздействие имеет далеко не столь однозначные последствия. Например, для минимизации последствий экономического кризиса правительство реализует помощь многим субъектам экономики (внешнее воздействие), а механизмом этой реализации выбираются несколько сильных банков. Результатом действия этого механизма становится то, что вся помощь достается только «сильным» и не доходит до остальных участников экономической системы. Если правительство будет выделять помощь «слабым» — последует массовая имитация «слабости», и не существует реальных инструментов для отделения «имитаторов» от действительно нуждающихся в помощи. Отказ от помощи слабым элементам экономики может повлечь социальные последствия. В любом случае выделение помощи извне неизбежно ведет к иждивенчеству и не стимулирует эффективное использование выделяемых средств. Итак, в экономике внешнее воздействие вызывает далеко не однозначную реакцию системы, что необходимо учитывать при построении модели.

Еще один аспект, отличающий экономические и социально-экономические системы от ближайших к ним по уровню сложности естественнонаучных систем, например метеорологии, — это реакция на информационное воздействие на систему. Смерч или землетрясение, рассматриваемые как кризисные состояния в природе, развиваются по объективным, пусть и не полностью разработанным до уровня построения адекватной модели, законам. В экономических и социально-экономических системах велика роль субъективного фактора, разнообразной, не всегда достоверной информации, которая может вызвать кризисные проявления. Шутка или оговорка влиятельного лица, появление неожиданной информации могут вызвать серьезнейшую реакцию на финансовых рынках, а вот достоверная или недостоверная информация по поводу смерча или землетрясения никак не влияет на реально протекающий процесс.

На финансовых рынках поведение игроков определяется стремлением к обогащению (это целевая функция), стадным инстинктом (проявление эффекта синхронизации). При этом возможно возникновение паники и кризиса, обусловленное чисто информационными и психологическими, но не экономическими причинами. Это кардинальным образом отличает экономические и социально-экономи-

ческие системы от естественнонаучных и технических. В то же время естественные колебания финансовых индикаторов (автоколебания), изменение показателей рынка под влиянием внешних факторов (вынужденные колебания), возможность должными внешними периодическими воздействиями «раскачать» систему (резонанс), взаимное влияние различных сегментов рынка (взаимодействие различных мод динамической системы) являются общими для всех видов рассматриваемых систем.

Сформулируем основные направления построения математической модели, включающей возможность анализа предкризисных, кризисных и послекризисных явлений в экономических системах:

- разработка обобщимой динамической модели мирового рынка на основе методологии нелинейной динамики, синергетики, теории катастроф;
- выделение значимых факторов и отбрасывание малозначимых факторов для построения модели обобщимой размерности;
- разработка методологии получения достоверных исходных данных, взаимосвязей и параметров модели по реальным макроэкономическим показателям;
- «тренировка и обучение» построенных моделей по данным реализованных реальных кризисных ситуаций;
- мониторинг текущих макроэкономических показателей и анализ предкризисных тенденций.

Отдельные компоненты для реализации такого подхода разработаны в различных отраслях науки — нелинейный динамический анализ, программная реализация моделей обобщимой размерности, система макроэкономических показателей, модели глобальной экономики. Предстоит переход на следующий качественный уровень — объединение этих компонент в динамическую модель экономической системы, позволяющую проводить количественный анализ предкризисных, кризисных и послекризисных явлений.

Глава 1.3. МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим различные виды математических моделей, используемых при исследовании динамических процессов в естествознании и экономике, на основе математического аппарата теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.3.1. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ЦИКЛЫ

Выделяются два типа моделей, соответствующие двум различным процессам, развивающимся во времени.

Первый тип моделей соответствует переходному процессу от одного состояния системы к другому. Обычно такие переходы занимают некоторый отрезок времени и развиваются во времени; такой переход называется переходным процессом. Примеры переходных процессов в экономике — перестройка, переход на выпуск новой продукции, множество других нециклических изменений, свойственных динамической системе. Можно сказать, что в нормально функционирующей экономике постоянно реализуется переходный процесс. Обратная ситуация получила наименование застоя, стагнации, и эта «неподвижность» является неестественным и неконкурентоспособным состоянием экономики. По мере развития состояние стагнации либо станет неустойчивым и зародится новое, устойчивое состояние, соответствующее развитию — переходному процессу к следующей фазе экономической системы, либо экономическая система прекратит свое существование. Наверное, все изменения, не являющиеся проявлением цикличности, можно отнести к переходным процессам.

В естествознании переходный процесс реализуется практически во всех ситуациях перехода от предшествующего состояния системы к следующему — включение электроприборов, старт автомобиля, огромное множество других проявлений переходов динамических систем от одного состояния к другому. Но в отличие от экономики неподвижное состояние технической системы, отсутствие переходного процесса, далеко не всегда является неестественным. Например, для автомобиля состояние неподвижности является совершенно нормальным, как и состояние движения. Для электроприбора и выключенное, и включенное состояния вполне естественны. А вот для самолета состояние неподвижности в воздухе невозможно.

Математической моделью переходного процесса является задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта задача формулируется следующим образом: задается система n ,

вообще говоря, нелинейных дифференциальных уравнений вида (1.3.1.1), n начальных условий, заданных в момент времени t_0 . Время t выделено квадратными скобками, чтобы подчеркнуть, что правые части могут явным образом зависеть от времени t (неавтономные системы), а могут и не зависеть (автономные системы). Естественно, функции правых частей $f_k([t], x_1, \dots, x_n)$ могут зависеть явным образом не от всех указанных аргументов.

$$\begin{aligned}\frac{dx_k(t)}{dt} &= f_k([t], x_1, \dots, x_n), \\ x_k(t_0) &= \xi_k, \\ k &= 1, \dots, n.\end{aligned}\tag{1.3.1.1}$$

Дифференциальные уравнения высших порядков могут быть сведены к системе вида (1.3.1.1). Для систем вида (1.3.1.1) при некоторых дополнительных предположениях имеют место теоремы существования и единственности решения. Отметим, что число начальных условий при $t = t_0$ совпадает с порядком системы уравнений.

Из приведенных в разделе примеров моделей экономической динамики к рассматриваемому типу относятся модель Харрода—Домара, модель Эванса, модель Солоу, нелинейная модель динамики переходных процессов в экономике.

О решении задачи Коши. Для некоторых линейных систем можно найти аналитические решения. Отдельные примеры таких решений приведены при обсуждении моделей экономической динамики. В тех случаях, когда аналитическое решение найти не удастся, можно воспользоваться численными методами решения задачи Коши (методы Эйлера, Рунге—Кутты различных порядков, Булиша—Штера и др.). Некоторые из этих методов включены в распространенные компьютерные программы как стандартные программы решения задачи Коши. При этом может задаваться необходимая точность вычислений и происходит автоматический выбор шага по времени при численном решении задачи для достижения заданной точности.

Кроме задач с заданием условий в начальный момент времени, существуют задачи, сформулированные в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для таких задач часть условий задается в начале интервала, а остальные условия — в конце интервала наблюдения. Общее число условий равно порядку системы. Для построения численного решения таких систем также разработаны алгоритмы (например, метод пристрелки), доведенные до стандартных программ. Возможна постановка задач с дополнительными условиями в промежуточной точке интервала.

Второй тип моделей динамических процессов в экономике относится к циклическим процессам. Экономические циклы, существу-

ющие в экономике, соответствуют периодическим решениям систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Следует учитывать, что цикличность в реальной экономике может не иметь строгой периодичности и строгой повторяемости, в классической постановке задач теории колебаний периодичность понимается в смысле математического определения периодической функции.

Задается система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}\frac{dx_k(t)}{dt} &= f_k([t], x_1, \dots, x_n), \\ k &= 1, \dots, n,\end{aligned}\tag{1.3.1.2}$$

и для нее ставится задача отыскания периодического решения. При этом период может быть задан или подлежит определению (подробнее эти варианты постановок задач о периодических решениях будут рассмотрены в дальнейшем). Для задачи об отыскании периодических решений не существует столь же эффективных алгоритмов, как для решения задачи Коши. Это объясняется сложностью задачи. Существуют нелинейные системы, у которых есть несколько устойчивых периодических решений, возможны бифуркации решений, т.е. при малом изменении параметра системы происходит кардинальное изменение решения. Более того, возможно хаотическое поведение решений при полностью детерминированных параметрах системы. Все это объясняет отсутствие конечного алгоритма решения задачи об отыскании периодических решений систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Для линейных же уравнений некоторые периодические решения можно найти аналитически. Однако реальный мир нелинеен.

Следует иметь в виду, что для некоторых задач моделирования экономических циклов следует делать поправку, связанную с непрерывным развитием реальной экономики, когда циклический процесс накладывается на общий тренд развития. При этом сложно говорить о периодичности в строгом математическом понимании этого термина. Однако можно выделить тренд, приблизив циклический процесс к классическому периодическому режиму. Рассмотрим простейший пример, поясняющий выделение периодического режима. Функция $y(t) = kt + \sin(t)$ является непериодической, слагаемое kt соответствует непериодическому тренду, слагаемое $\sin(t)$ — периодическим (циклическим) колебаниям, наложенным на тренд. Введем функцию $f(t) = y(t) - kt$. Тем самым мы выделили непериодический тренд, и функция $f(t) = \sin(t)$ является периодической в строгом понимании термина «периодичность».

Существуют различные классификации динамических процессов. Один из возможных вариантов представлен на рис. 1.3.1.1.

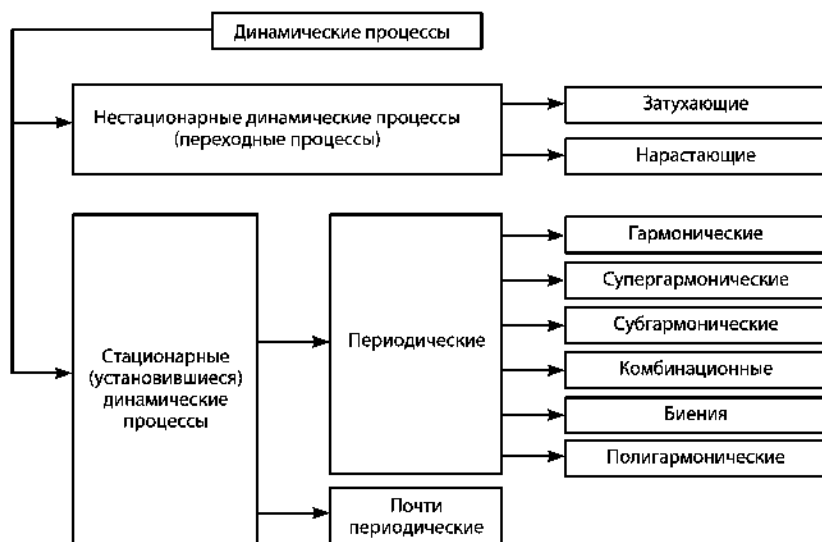


Рис. 1.3.1.1. Классификация динамических процессов

1.3.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Представить варианты динамических моделей удобнее на примерах моделей из естественнонаучных дисциплин. При анализе простейших задач вид уравнений полностью определяется постановкой задачи и заданным уровнем точности модели.

Рассмотрим классификацию моделей динамики по степени нелинейности. Модель считается нелинейной, если хотя бы одна из участвующих в модели функций является нелинейной функцией любого своего аргумента. Вид нелинейных слагаемых в уравнениях, входящих в простейшие модели естественнонаучных дисциплин, определяется постановкой задачи. Например, уравнение вынужденных колебаний математического маятника около нижнего положения равновесия имеет вид

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \sin(x(t)) + D(x(t), \frac{dx(t)}{dt}) = W(t), \quad (1.3.2.1)$$

где $x(t)$ — угол отклонения от положения равновесия; t — время; ω_0 — частота малых собственных колебаний; $W(t)$ — внешнее воздействие, которое считается периодическим с известным периодом T , т.е. $W(t) = W(t + T)$; $D(x(t), dx(t)/dt)$ — слагаемое, отражающее диссипацию энергии. Это уравнение является существенно нелинейным,

так как неизвестная функция $x(t)$ входит в него как аргумент функции $\sin(x(t))$. Оно может использоваться для анализа с высокой точностью колебаний с любыми амплитудами — малыми, средней величины, с большой амплитудой, вращением вокруг оси. По отношению к углу отклонения от положения равновесия $x(t)$ эта модель весьма точна, и все отброшенные факторы видны при постановке задачи. Например, если исследователь считает необходимым, можно учесть зависимость ускорения свободного падения от координаты $x(t)$; при этом получим, что параметр модели ω_0 будет не константой, а станет зависеть от искомой функции $x(t)$, но принципиального усложнения модели не произойдет. Естественно, это утрированный пример построения модели такого уровня точности, который не нужен в подавляющем большинстве приложений. Примениительно к моделям социально-экономических процессов такой уровень уточнения вряд ли возможен из-за сложности исходной системы.

Диссипация энергии в модели (1.3.2.1) записана в общем виде, конкретный вид функции $D(x(t), dx(t)/dt)$ может определяться постановкой задачи так же, как постановкой задачи определен вид нелинейной функции $\sin(x(t))$. Обычно функция $D(x(t), dx(t)/dt)$ принимается в виде $D(x(t), dx(t)/dt) = b(dx(t)/dt)$, где, как правило, параметр b считается постоянным и называется коэффициентом диссипации. Такой вид учета диссипации является традиционным, так как в линейной модели именно при таком виде зависимости можно получить аналитическое решение.

Периодическое внешнее воздействие $W(t)$ часто задается в виде $W\sin(\omega t)$ (ω — частота воздействия, период $T = 2\pi/\omega$). Заметим, что мы рассматриваем нелинейную модель; в ней не имеет места принцип суммирования решений, соответствующих различным правым частям. В дальнейшем изложении мы будем подробно рассматривать нелинейность, порождаемую слагаемым $\sin(x(t))$, другие виды нелинейностей могут быть исследованы по той же схеме.

Как правило, для модели (1.3.2.1) ставится задача отыскания периодического решения, так как при наличии диссипации переходные процессы имеют затухающий характер и их влияние с течением времени становится незначительным. Аналитическое решение для этой существенно нелинейной задачи неизвестно. Численные методы решения задачи Коши позволяют найти решение, быть может периодическое, следующим образом. Задаются произвольные начальные условия, решается задача Коши на отрезке времени, соответствующем многим периодам внешнего воздействия. Переходный процесс, связанный с влиянием начальных условий, затухает из-за влияния диссипации, и в конце интервала численного интегрирования получается решение, переходный процесс в котором не вносит существенных искажений.

Если колебания имеют не очень большую амплитуду, для упрощения модели применяется следующий прием. В разложении в ряд функции

$$\sin(x(t)) \approx x(t) - \frac{x^3(t)}{3!} + \frac{x^5(t)}{5!} - \frac{x^7(t)}{7!} + \dots \quad (1.3.2.2)$$

ограничиваемся первыми двумя слагаемыми:

$$\sin(x(t)) \approx x(t) - \frac{x^3(t)}{3!}; \quad (1.3.2.3)$$

при этом получится уравнение вида

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) - \frac{1}{6} x^3(t) + b \frac{dx(t)}{dt} = W \sin(\omega t). \quad (1.3.2.4)$$

Последнее уравнение при колебаниях с амплитудой меньше 1 является квазилинейным, для его исследования можно использовать асимптотические методы, но, естественно, никаких существенно нелинейных эффектов (хаос, странный аттрактор) получить невозможно. Однако в подобных системах еще остается возможность существования устойчивых и неустойчивых периодических решений разного периода и бифуркации решений при изменении параметров системы.

Наконец, при малых колебаниях в разложении в ряд функции $\sin(x(t))$ можно ограничиться одним слагаемым, при этом получится линейное уравнение, вошедшее в классические учебники:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) + b \frac{dx(t)}{dt} = W \sin(\omega t). \quad (1.3.2.5)$$

Это линейное уравнение имеет аналитическое решение, в рамках этого решения строится амплитудно-частотная характеристика и исследуется резонанс. Линейная модель, естественно, не содержит в себе никаких нелинейных эффектов, и область применимости ее весьма узка — только там, где $\sin(x) \approx x$ с приемлемой погрешностью.

Итак, рассматривая один и тот же простейший реальный объект — математический маятник, — мы построили три модели его движения: нелинейную (1.3.2.1), квазилинейную (1.3.2.4) и линейную (1.3.2.5).

Нелинейная модель — самая полная, но и самая сложная для исследования. Она включает в себя и квазилинейную, и линейную модели. Именно в существенно нелинейной постановке в простых динамических моделях обнаруживаются как простые, так и весьма сложные виды движения исследуемой системы.

Квазилинейная модель допускает приближенное исследование с помощью асимптотических методов. Она включает в себя линейную модель. В квазилинейной постановке обнаруживаются некоторые свойства динамики реальной системы, которые не могут быть обнаружены в линейной модели.

Линейная модель — самая простая, допускает построение аналитического решения. Но эта модель не может отражать многие нелинейные эффекты, присущие реальным динамическим системам.

В линейной, квазилинейной, существенно нелинейной постановках могут строиться как модели переходных процессов, так и модели циклических явлений в экономике.

Основоположник отечественной школы нелинейных колебаний академик Л.И. Мандельштам еще в 30-е гг. XX в. говорил о нелинейной культуре, включающей надежный математический аппарат и представления, адекватные новым задачам, необходимости выработать нелинейную интуицию, годную там, где оказывается непригодной интуиция, выработанная на линейных задачах [1.22]. Эта нелинейная культура последовательно развивается в различных отраслях науки. Часто модели, методы исследования, качественные результаты, полученные в каком-то направлении, являются «дебютной идеей» в других направлениях. Возникает мысль о поиске универсального класса моделей, которые могли применяться к различным системам. Объединяющим фактором для многих разделов динамического моделирования являются единый математический аппарат, качественные результаты. Естественно, специфика конкретной области науки не может не оказывать влияния на построение математической модели. В экономике эта специфика заключается в сложности объекта моделирования и протекающих в нем процессов, возможности влияния на экономические процессы социально-экономических трудно формализуемых факторов. Отдельной проблемой в построении моделей экономической динамики является определение вида функциональной зависимости и коэффициентов при соответствующих компонентах в математической модели. Наиболее близкими к истине являются зависимости, определяемые по данным обследования реального экономического процесса. При этом получаемые зависимости, как правило, представляют собой таблицы значений. В этой ситуации говорить о линейности модели бессмысленно. Данные учитываются в состоянии «как есть». При численной реализации массивы реальных данных можно аппроксимировать

тем или иным способом. Большое распространение получила аппроксимация сплайнами или полиномами достаточно высокой степени. При таком подходе в модель естественным образом включаются все уровни — линейный, квазилинейный, существенно нелинейный. По характеру полученного решения можно судить о близости процесса к тому или иному типу из рассмотренной классификации. Не следует забывать, что при изменении параметров системы и (или) внешних воздействий в одной и той же системе могут реализовываться принципиально различные по виду нелинейных эффектов процессы.

Читателю предлагается самостоятельно провести классификацию по степени нелинейности моделей экономической динамики.

Рассмотрим другие виды классификации моделей динамики.

Линейные и нелинейные модели динамических процессов разделяются на автономные и неавтономные. В *автономных* системах внешние воздействия зависят только от состояния системы и в дифференциальное уравнение движения время t явным образом не входит. В дифференциальные уравнения движения *неавтономных* систем время t входит явно, в них присутствуют функции времени t .

Понятие автономности не совпадает с понятием *замкнутости* (изолированности) системы. Последнее соответствует отсутствию внешних воздействий. Автономная система может быть *незамкнутой* (пример — системы, в которых возникают автоколебания). Замкнутая система может быть неавтономной (при действии парных внешних воздействий, заданных в виде явных функций времени t).

Автономные системы могут быть консервативными и неконсервативными; к *неконсервативным системам* относятся диссипативные и автоколебательные.

Консервативными системами называются автономные системы, в которых полная энергия (для механических систем) или ее аналог (для других систем) постоянны во времени.

Диссипативными называют автономные системы, в которых присутствуют диссипативные силы (силы сопротивления движению) или их аналоги.

Неавтономные системы характеризуются тем, что в них присутствуют слагаемые, явным образом зависящие от времени t . Обычно эти слагаемые соответствуют внешним воздействиям.

Детерминированными называют модели, в которых все переменные детерминированы; функции являются детерминированными функциями своих аргументов. Естественно ожидать, что решения в таких моделях будут детерминированными функциями. Во многих случаях это так, но решения некоторых существенно нелинейных систем в определенных условиях ведут себя как случайные функции.

Стохастическими называют модели, в которых внешние воздействия или параметры системы являются случайными функциями.

Динамические модели по числу переменных, включаемых в динамический процесс, разделяются на системы с *одной степенью свободы*, системы с *несколькими степенями свободы* и системы с *бесконечным числом степеней свободы (континуальные)*.

Одна из возможных классификаций моделей приведена на рис. 1.3.2.1.

По характеру нелинейности	Линейные Квазилинейные Существенно нелинейные
По характеру моделируемых процессов	Переходные процессы Циклические процессы Вынужденные колебания Автоколебания Параметрические колебания Колебания смешанного характера
По числу степеней свободы	С одной степенью свободы С бесконечным числом степеней свободы (континуальные)
По признаку сохранения энергии системы	Консервативные Неконсервативные Автоколебательные Диссипативные
По стохастическим признакам	Детерминированные Стохастические
По взаимодействию с окружающей средой	Автономные Неавтономные

Рис. 1.3.2.1. Классификация моделей динамических процессов

1.3.3. ВИДЫ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Переходя к анализу циклических процессов, для которых строятся динамические модели, отметим терминологическую особенность. При моделировании экономических систем принято говорить о цикличности процессов, в той или иной форме повторяющихся через некоторые интервалы времени. В естественнонаучных дисциплинах чаще используется термин «колебания» (*vibration, oscillation*), давно уже существует междисциплинарное научное направление «Теория колебаний». Это различие в терминологии отражает тот

факт, что в экономике практически не встречается периодических процессов в строгом математическом понимании термина «периодичность», а в естественнонаучных дисциплинах такие процессы являются обычным объектом исследования. При исследовании существенно нелинейных моделей периодических процессов в естественнонаучных дисциплинах найдены решения, подобные наблюдаемым в экономике циклическим процессам. Речь идет о почти периодических решениях, хаотическом поведении решений в детерминированных системах, бифуркации решений, сложных полигармонических решениях нелинейных моделей, других эффектах, обнаруженных в существенно нелинейных системах. Исходя из того, что динамические модели в естественнонаучных приложениях начали разрабатываться раньше, чем в экономике, и терминология в достаточной мере сформировалась, мы будем иногда употреблять для обозначения циклических процессов в экономике терминологию, сформировавшуюся в теории колебаний.

Вынужденные колебания (*Forced vibration*) — колебания, вызванные внешним воздействием, имеющим, как правило, периодический характер. В экономике это колебания, связанные с периодическими внешними воздействиями на хозяйственный механизм внешних факторов. Сезонные изменения климата, периодические инвестиционные акции — примеры таких воздействий. В технике примерами вынужденных колебаний могут служить вибрации транспортных средств, обусловленные воздействиями, передаваемыми от двигателя, в природе — морские приливы и отливы под действием силы притяжения Луны. Примером модели вынужденных колебаний в экономике является модель динамики валового продукта (1.2.3.1), если внешнее воздействие f является периодической функцией времени. Примером модели вынужденных колебаний в механике является уравнение вынужденных колебаний математического маятника (1.3.2.1) или его линеаризованные варианты (1.3.2.4) и (1.3.2.5). Модель (1.2.8.3) может относиться и к механике, и к экономике. Вынужденные колебания реализуются в неавтономных системах.

Автоколебания (*Self-excited vibration*) — колебания (как правило, устойчивые), источник существования которых не имеет циклического характера. В технике примерами автоколебаний могут служить колебания маятника старинных часов (источник энергии — потенциальная энергия гири), колебания анкерного механизма наручных часов (источник энергии — взведенная пружина механических часов или энергия батарейки кварцевых стрелочных часов). Колебания крыла самолета (источник энергии — набегающий поток воздуха), звук струны смычковых инструментов (источник энергии — движение смычка), скрип двери, голос человека (колебания голосовых связок под действием проходящего воздуха), множество других видов

автоколебаний окружает нас. В экономике сложно отделить автоколебания от других циклических изменений, обусловленных внешними воздействиями. Например, циклические изменения цен, курсов валют в стабильной экономической ситуации, когда внешние факторы оказывают незначительное воздействие. Автоколебания реализуются в диссипативных системах. Например, в уравнении

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + cx + \gamma x^3 = 0,$$

которое получено из модели (1.2.8.3) при $W = 0$, при значении параметра $b < 0$ будут реализовываться автоколебания с возрастающей амплитудой (при $b < 0$ происходит «подкачка энергии» в систему). При $b > 0$ в этой системе будут затухающие колебания (при $b > 0$ происходит диссипация энергии). При $b = 0$ система является консервативной, энергия сохраняется, колебания происходят с постоянной амплитудой, определенной начальными условиями.

Параметрические колебания (*Parametric vibration*) — колебания, вызванные и поддерживаемые периодическим изменением параметра системы. Пример — раскачивание человека на качелях, когда он, периодически приседая, изменяет параметр системы — расстояние от точки подвеса до центра масс. В экономике в зависимости от вида модели также могут реализовываться циклические изменения такого же типа. Примером модели, в которой могут возбуждаться параметрические колебания, является уравнение движения математического маятника, точка подвеса которого совершает колебания в направлении силы тяжести g по закону $\xi(t)$. Уравнение движения имеет вид

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{1}{g} \frac{d^2 \xi(t)}{dt^2}\right) \sin(x(t)) = 0.$$

Параметрические колебания в обобщенной модели экономики (1.2.8.3) могут возникнуть, если отсутствуют внешние инвестиции ($W = 0$), а параметр c периодическим образом зависит от времени t . Уравнение с параметрическим возбуждением имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + c \sin(\omega t) x + \gamma x^3 = 0.$$

Перечислим дополнительные понятия и некоторые более сложные виды колебаний, которые могут проявляться в нелинейных динамических системах.

Гармонические колебания (*Harmonic vibration*) — колебания, при которых изменяющаяся величина и (или) ее производная по времени изменяется пропорционально синусу с аргументом, линейно зависящим от времени.

Гармоника периодических колебаний (*Harmonic*) — каждое слагаемое периодических колебаний, представленных в виде суммы гармонических колебаний (ряда Фурье).

Полигармонические колебания — колебания, при которых изменяющаяся величина содержит несколько различных гармоник (несколько слагаемых ряда Фурье).

Периодические функции $x(t)$ с периодом T , удовлетворяющие условию Дирихле (ограниченность, конечное число экстремумов и точек разрыва первого рода на любом конечном интервале), могут быть представлены в виде ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t).$$

Это отражает возможность представления периодических колебаний в виде суммы гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте $\omega = 2\pi/T$. Коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ называются коэффициентами Фурье. Коэффициент $a_0/2$ соответствует среднему значению периодически меняющейся величины. Коэффициенты a_1, b_1 характеризуют составляющую движения с основной частотой ω . Эта составляющая называется первой или основной гармоникой периодического движения. Компоненты ряда Фурье с номером $k > 1$ характеризуют составляющие периодического движения с частотами $k\omega$. Эти компоненты называются высшими гармониками; число k называется номером гармоники. Ряд Фурье для периодического процесса может быть как бесконечным, так и конечным.

Спектральный анализ периодического процесса — определение спектра частот и коэффициентов ряда Фурье по заданной T — периодической функции $x(t)$. Коэффициенты ряда Фурье определяются по следующим формулам:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega t) dt \quad (k = 0, 1, \dots);$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega t) dt \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Амплитуда гармонических колебаний (*Amplitude*) — наибольшее по модулю отклонение величины, совершающей гармонические коле-

бания, от среднего значения. Амплитуда отдельных гармоник вычисляется по формуле

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}.$$

Фаза гармонических колебаний (Phase) — аргумент функции, описывающей гармонические колебания. Начальная фаза — значение этого аргумента в начальный момент. Начальная фаза отдельных гармоник вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}(\varphi_k) = \frac{b_k}{a_k}.$$

Частотным спектром (Frequency spectrum) периодического процесса называется совокупность частот гармонических составляющих, упорядоченных по возрастанию.

Амплитудный спектр периодического процесса — совокупность амплитуд отдельных гармоник, расположенная в порядке возрастания частот.

Для численного проведения спектрального анализа существуют стандартные программы для ЭВМ.

Затухающие колебания (Decaying vibration) — колебания с уменьшающейся во времени амплитудой.

Растущие колебания (Increasing vibration) — колебания с увеличивающейся во времени амплитудой.

Амплитудно-частотная характеристика (Amplitude frequency characteristic) — зависимость амплитуды колебаний от частоты.

Свободные колебания (Free vibration) — колебания, обусловленные начальным состоянием динамической системы, происходящие без внешних воздействий.

Собственная частота (Natural frequency) — каждая из частот свободных незатухающих колебаний линейной консервативной динамической системы.

Частота свободных колебаний — каждая из частот свободных затухающих колебаний линейной диссипативной системы.

Спектр собственных частот (Natural frequency spectrum) — совокупность собственных частот.

Резонанс (Resonance) — резкое изменение характеристик динамической системы при совпадении собственных частот с частотой внешнего воздействия или при целочисленном соотношении между этими частотами.

Резонансная частота (Resonance frequency) — частота, соответствующая одному из максимумов амплитудно-частотной характеристики.

Антирезонансная частота (*Antiresonance frequency*) — частота, соответствующая одному из минимумов амплитудно-частотной характеристики.

Динамическая жесткость (*Dynamic stiffness*) — отношение амплитуды гармонического внешнего воздействия к амплитуде гармонических вынужденных колебаний.

Критический коэффициент сопротивления (*Critical damping coefficient*) — значение коэффициента сопротивления (диссипации), при котором динамическая система перестает проявлять свойства колебаний.

Почти периодические колебания (*Almost-periodic vibration, quasiperiodic vibration*) — колебания, близкие к периодическим, состоящие из гармоник с несоизмеримыми периодами.

Случайные колебания (*Random vibration*) — реализуются в том случае, когда внешние воздействия или параметры системы являются случайными функциями. Кроме того, случайные колебания могут реализовываться в полностью детерминированных существенно нелинейных системах.

Синхронные колебания (*Synchronous vibration*) — колебания двух или более систем с одинаковыми частотами.

Синфазные гармонические колебания (*In-phase vibration*) — синхронные гармонические колебания с равными в любой момент фазами.

Битения (*Beat*) — колебания, которые являются результатом сложения двух и более гармонических колебаний с близкими частотами.

Супергармонические (ультрагармонические) колебания (*Superharmonic vibration*) — гармоники периодических вынужденных колебаний, частоты которых в целое число раз больше частоты внешнего гармонического воздействия.

Субгармонические колебания (*Subharmonic vibration*) — гармоники периодических вынужденных колебаний, частоты которых в целое число раз меньше частоты внешнего гармонического воздействия.

Комбинационные (субультрагармонические) колебания (*Combined vibration*) — гармоники периодических вынужденных колебаний, частоты которых в дробное число раз отличаются от частоты внешнего гармонического воздействия.

Колебания с несколькими степенями свободы (колебания систем с конечным числом степеней свободы) — колебания нескольких взаимосвязанных динамических систем.

Колебания с бесконечным числом степеней свободы — колебания в распределенных (континуальных) системах.

Колебания смешанного характера — любые сочетания из перечисленных выше видов колебаний. Например, могут реализовываться сочетание вынужденных, параметрических, автоколебаний и т.д.

ГЛАВА 1.4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ПРОЦЕССЫ

1.4.1. ОБЩНОСТЬ ЭФФЕКТОВ, МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА И МЕТОДОВ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И ЕСТЕСТВОЗНАНИИ. МЕХАНИЦИЗМ. СИНЕРГЕТИКА. ЭКОНОФИЗИКА

В настоящее время математические методы внедряются в отрасли, которые ранее представлялись неформализуемыми. От традиционных сфер приложения математического моделирования — механики, физики — развиваемые там методы переносятся на биофизику, микро- и макроэкономику, социально-экономические системы [1.46]. Стыки наук (математическая экономика, экономическая кибернетика, эконофизика, синергетическая экономика) становятся наиболее плодотворными зонами получения новых знаний. Происходит естественный перенос методов построения математических моделей, накопленных в естественных науках, например в физике, и методов доведения процесса моделирования до конечного прикладного результата, сконцентрированных в области прикладной математики, в область социально-экономических наук. Методы и модели естественных наук и прикладной математики находят применение и дальнейшее развитие в области социально-экономических дисциплин.

Механицизм в начале своего существования, в XVII—XVIII вв., как мировоззренческий принцип объяснял законы развития природы законами механики. Впоследствии возникла более широкая трактовка механицизма как способа сведения законов поведения сложной системы к поведению более простой системы. Ни в коем случае не вступая в философские дискуссии по этому поводу, отметим общность моделей экономической динамики, рассмотренных ранее, и моделей динамики более простых систем, изучаемых динамикой как разделом механики, теорией колебаний, теорией катастроф.

Сама по себе общность моделей экономической динамики и теории колебаний могла бы остаться чисто теоретическим аспектом моделирования, но невозможно игнорировать общность эффектов, проявляющихся в реальной экономике, моделях теории колебаний и натурных технических экспериментах, соответствующих этим моделям. Организация экспериментов в реальной экономике крайне

сложна, многие действия регуляторов экономики могут повлечь нежелательные последствия.

Общность эффектов, наблюдаемых в реальной экономической деятельности (циклическое развитие, кризисы, хаос, зарождение и развитие новых состояний), технических и биологических системах и рассматриваемых классах моделей, позволяет рассчитывать на разработку подобных моделей для исследования нелинейной экономической динамики. Эта общность имеет всеобъемлющий характер. Так, наблюдаемые циклы экономического развития [1.1–1.3, 1.23, 1.24] ассоциируются с автоколебаниями, т.е. периодическими процессами в технических приложениях, источник энергии которых не имеет циклического характера. Регулярные воздействия на хозяйственный механизм с периодом один год (осенний сбор урожая, ежегодная дефляция в августе–сентябре, повышенные затраты на отопление в зимний сезон и т.п.) аналогичны периодическим воздействиям на динамическую систему при вынужденных колебаниях. Кроме естественного периода в один год, в экономической системе присутствуют другие периодические воздействия — период уплаты налогов, когда повышается потребность банков в рублевых высоколиквидных активах, установившийся четырехлетний цикл политической активности в России и других странах, влияющий на хозяйственно-инвестиционный климат. Такого рода воздействия на экономику с различными периодами аналогичны воздействию на динамическую систему полигармонических возмущений. Можно проводить аналогии между экономическим кризисом и потерей динамической устойчивости и переходом к хаосу в динамической системе. При дальнейшем изменении параметра происходит переход от хаоса к упорядоченному движению — выход из кризиса. Бифуркация решений в динамической системе при изменении параметра ассоциируется с изменениями в экономике, когда старое направление бизнеса становится нерентабельным (неустойчивым) и на его основе зарождаются новые, более прибыльные виды деятельности (новые устойчивые состояния).

Отметим определяющую роль учета при моделировании нелинейных свойств объекта. В существенно нелинейных моделях наряду с привычными циклическими колебаниями обнаруживаются сложные полигармонические устойчивые и неустойчивые режимы, бифуркации, странный аттрактор — те режимы, которые принципиально не могут быть исследованы в рамках линейного и квазилинейного подхода, но которые получены при анализе существенно нелинейных моделей и устойчиво повторяются в численных и натурных экспериментах. Обобщая эти результаты, можно считать, что хаос является естественной динамической формой эволюции сложной системы и часто встречается (возможно, как переходный режим) в простых ди-

намических системах. Хаос в социально-экономических системах, биологических сообществах можно трактовать как естественную среду проявления конкуренции. Искусственное устранение хаоса (в механике — за счет большой диссипации энергии, в экономике — за счет чрезмерной зарегулированности, плановости, высокого налогообложения) ведет к неустойчивости и устранению сложных динамических режимов и переходу к простым решениям, деградации системы. В механике это состояние покоя или простейшего движения, быть может периодического, в экономике — ситуация стагнации и застоя.

Именно при переходе от хаоса к упорядоченным движениям либо после потери устойчивости предыдущего режима зарождаются новые устойчивые нестрививальные решения в механике и наиболее перспективные и прибыльные направления в экономике. И для анализа таких эффектов в экономике необходима разработка адекватных моделей, способных отразить обсуждаемые эффекты.

Во второй половине XX в. появилось новое направление исследований, связанное с «наукой о сложном» (*complexity sciences*). Это междисциплинарное направление, в центре внимания которого находятся проблемы исследования систем с нелинейной динамикой, неустойчивым поведением, эффектами синхронизации, самоорганизации, наличием хаотических режимов, бифуркациями. Наука о поведении и самоорганизации сложных систем получила название синергетики [1.25], во франкоязычных странах — теории диссипативных структур [1.26], в США — теории динамического хаоса. В русскоязычной литературе используются все эти термины.

Первоначально прикладной областью исследования для синергетики были естественные науки, однако вскоре стали появляться работы, где синергические эффекты исследовались применительно к социальным [1.27] и социально-экономическим системам. При этом выделяются области применения хаотической динамики в социальных, политических науках, экономике и управлении социальными системами.

Нелинейность, неопределенность, недетерминированность процессов и результатов, изучаемых в естественных науках, вызвали интерес в различных направлениях экономических и социальных исследований. Синергетика представляет собой ту основную область точных наук [1.47–4.49], достижения которой интегрируются в теорию и методологию социально-экономического моделирования. Она воспринимается как средство для объяснения и выявления многих аспектов неопределенности, нелинейности, сложной предсказуемости поведения социально-экономических систем. Синергетика является очередным уточнением (после теории относительности и

квантовой механики) ньютоновского детерминированного подхода к моделированию реального мира.

Возможность получения при моделировании сложных нелинейных эффектов является достижением теории нелинейных систем, в поведении которых существенную роль играют обратные связи, изменяющие соотношения между переменными, описывающими динамику, и порождающие неустойчивость. Динамические характеристики таких систем могут сильно изменяться, вследствие чего существующие структуры могут становиться неустойчивыми и разрушаться, а новые — появляться. Возможно возникновение хаотического поведения системы, а затем, при изменении параметров, — новых устойчивых форм равновесия или движения. Недетерминированные системы могут проявлять свойства хаоса низкого или высокого порядка. В первом случае возможны некоторые краткосрочные прогнозы относительно поведения системы, во втором случае предсказания недостоверны. В нелинейных системах не действует принцип суперпозиции, т.е. для всех нелинейных систем характерно непропорциональное соотношение между причинами и следствиями, воздействиями на систему и ее реакциями.

Развитие синергетики в области естественных наук в значительной мере обусловлено тем, что многие принципиально важные результаты получены при исследовании моделей относительно простых систем. При этом достигнута полная достоверность, повторяемость синергических эффектов, отработана методология исследований. Достигнуто совпадение с точностью расчетов результатов моделирования и натурных экспериментов с простыми динамическими системами. Это позволило постепенно включать в область исследований все более сложные системы и модели.

В области социально-экономических приложений гораздо сложнее выделить простую подсистему и построить ее модель. Да и эксперименты в социально-экономической области организовывать крайне сложно. Результаты наблюдений за поведением социальных и социально-экономических систем показывают, что даже в относительно простых ситуациях им присущи типичные свойства существенно нелинейных систем.

Исследователи Дирк Хелбинг и Андерс Йоханссон из Дрезденского технологического университета изучили видеозапись инцидента, произошедшего в январе 2006 г. на мосту Джамарат, в котором погибло около 300 паломников. С помощью компьютера они смогли определить скорость и положение отдельных людей, движущихся в огромной толпе в сторону моста. В 45-минутной записи ученым удалось выделить три отдельные фазы движения.

На первой стадии паломники стабильно движутся в сторону моста, при этом скорость движения уменьшается с увеличением плот-

ности толпы. Затем происходит внезапный резкий переход ко второй фазе движения — движению с остановками, которое представляет собой череду волн, распространяющихся вдоль направления движения. Такие волны наблюдаются примерно в течение 20 минут, при этом плотность толпы продолжает расти, и внезапно наступает третья и самая опасная фаза: группы людей начинают хаотично двигаться во всех направлениях — это явление Хелбинг и Йоханссон назвали «турбулентностью толпы».

Авторы полагают, что турбулентность образуется, когда люди начинают паниковать и толкаться, стремясь увеличить свое личное пространство. При этом в толпе образуются сильные волны сжатия, отбрасывающие людей на несколько метров, в результате чего сотни паломников оказываются растоптанными. Ученые установили, что люди начали гибнуть спустя 10 минут после установления турбулентности и через 30 минут после начала движения с остановками. Авторы считают, что автоматическое отслеживание точек фазовых переходов с помощью систем видеонаблюдения позволит властям своевременно принимать меры для обеспечения безопасности людей. На основании данных, полученных в результате проведенного исследования, ученые выработали ряд рекомендаций, которые были учтены при реконструкции моста Джамарат и прилегающих к нему территорий.

Отметим повторяемость подобных трагедий в разных странах, но в схожих ситуациях. При этом совершенно не присутствуют экономические факторы.

Синергетика привлекла внимание исследователей в области экономики и социальных наук. По утверждению одного из основоположников методологии имитационного моделирования Дж. Форрестера [1.14—1.16], мы живем в сильно нелинейном мире. Социум проявляет все свойства существенно нелинейной системы, ему присущи нестабильность и слабая предсказуемость, связь причины и следствия далеко не всегда прослеживается при изучении социальных процессов. Социальные системы являются историческими, зависящими от их «траектории» в прошлом, и это обстоятельство также подтверждает потенциальную значимость теории хаоса для социальных наук. Исследователи, работающие в различных областях социально-гуманитарного знания, отмечают типичность изменения в характере взаимоотношений переменных, описывающих динамику социума.

Перенесение свойств одного объекта или явления на другой на основании общего признака называют метафорой. В силу этого синергетика имеет большое метафорическое значение для изучения социальных систем и служит стимулом появления работ, посвященных применению новых методов моделирования в социальных и

экономических науках. Появляются исследования, в которых используются строгие методы математической теории нелинейных колебаний при изучении самых разных социально-экономических явлений. При этом большое значение имеет анализ временных рядов: с его помощью проясняется, каким образом возникает и изменяется во времени нелинейное и хаотическое поведение.

В области естественных наук достигнут значительно больший прогресс синергетики, чем в области социально-экономических наук. Объяснение этому — большая сложность объектов исследования гуманитарно-социальных и экономических наук. По мере того как естественные науки продвигались в изучении нелинейных процессов, они также подошли к тому уровню сложности, который сдерживал применение методов синергетики в области социально-экономических наук. Синергетика является средством сближения на базе общего инструмента моделирования и общности эффектов различных отраслей знания. Это способствует более глубокому пониманию как природных, так и экономических и общественных явлений. Возникает даже не междисциплинарное направление, а объединяющий, мультидисциплинарный подход.

В некоторых работах [1.28] рассматриваются возможности применения теории хаоса в политических исследованиях: политологи анализируют изменения и эволюцию различных процессов во времени (например, тренды общественного мнения в отношении тех или иных политических фигур или явлений). Эти тренды могут претерпевать кардинальные изменения во времени. По мере анализа таких данных возникает естественный вопрос о построении адекватной модели, соответствующей наблюдаемым процессам. Естественная трудность при построении такой модели определяется тем, что политика на любом уровне во многом зависит от индивидуальных взаимодействий.

Некоторые явления на финансовых рынках также могут быть интерпретированы с позиций синергетики — известна [1.28] интерпретация «черного вторника» 19 октября 1987 г., «обвала» на Нью-Йоркской фондовой бирже как следствия поведения группы людей (брокеров), спровоцированного ограниченностью информации в критической ситуации. Заметим, что в 1987 г. Интернет и мобильная связь еще не получили массового распространения. Эта интерпретация основывается на том, что при нормальном функционировании фондового рынка брокеры регулярно обновляют свою информацию. Канал связи между брокерами и источником информации открыт. Цена акций зависит от многих факторов: сложившихся цен, объема предшествующих сделок, финансовых ожиданий. Когда возникают кризисная ситуация или ее предпосылки, цены падают. Брокеры в этой ситуации при принятии решений ориентируются на поведение

коллег, используют аналитическую информацию. В случае чрезмерно большой активности исчерпывается пропускная способность каналов связи. Брокеру в отсутствие обновления информации остается следовать поведению толпы. При этом может возникнуть положительная обратная связь, при которой состояние системы становится неустойчивым.

Э. Петерс [1.52] рассматривает процессы, происходящие на рынках капитала, теории экономических циклов, кризисов, хаоса с точки зрения нелинейной экономической динамики.

Известно [1.28] применение теории хаоса при изучении стабильности системы враждующих стран. С использованием нелинейного моделирования исследуется, какие формы организации союзников и противников более склонны к переходу к состоянию войны. Рассматриваются двухполярный, трехполярный мир, демократические страны, страны с авторитарным управлением, изменяющиеся группировки и др. Использование компьютерного моделирования выявило наличие хаотических состояний, бифуркаций, рассматриваемых как переход в состояние войны, режимов функционирования системы с различной степенью устойчивости. В результате моделирования получены данные о том, что трехполярный мир более склонен к бифуркации; совокупность стран с авторитарным управлением более склонна перейти в состояние войны; система блоков проявляет большую устойчивость к мирному сосуществованию. Эти результаты моделирования совпадают с историческим опытом.

Среди наук социально-экономического блока нелинейный динамический подход получил наибольшее признание в экономике. Это объясняется, в частности, традиционно высоким уровнем применения математики и вычислительной техники в экономических исследованиях. Этот подход дополняет равновесные модели, получившие широкое распространение в макро- и микроэкономике. При этом резко расширяется одно из основных предположений экономической теории — о рациональном поведении экономических агентов (или о рациональных ожиданиях). Нелинейный характер многих динамических процессов в экономике делает область применимости названного предположения достаточно ограниченной. В различных областях экономики предложены [1.27] несколько нелинейных моделей, включающих рациональные ожидания, но способных генерировать хаотическую динамику. При этом возникает аналогия с детерминированными моделями в естествознании, решения которых ведут себя хаотически. Серьезная проблема состоит в том, что наличие хаоса сопровождается чувствительностью к начальным условиям. Малое отклонение в начальных условиях ведет к значительному отклонению в поведении системы. Следствием этого является тот факт,

что незначительные отклонения в оценках могут привести к серьезным ошибкам в долгосрочном прогнозировании.

Среди упомянутых моделей экономической динамики представляют интерес модели индивидуальных предпочтений, основанные на наблюдениях Веблена (1899) и Лейбенштейна (1950), выявивших эффекты «бандвагона» (индивидуум приобретает товар в случае, если другие потребители его покупают) и «сноба» (индивидуум не хочет приобретать товар, если он покупается другими). В этой модели при некоторой пороговой величине цены товара начинается хаотическая динамика.

Существует направление [1.29–1.36], рассматривающее современные методы построения экономических моделей как раздел физики. Термин «эконофизика» [1.29] употребляется в работах экономического направления, использующих разработанные в естественных науках методы построения динамических моделей. В заголовке одной из монографий [1.37] используется термин «синергетическая экономика», соответствующий использованию математического аппарата нелинейного анализа для задач макроэкономической динамики.

В классической работе Н.Д. Кондратьева [1.3], по-видимому, впервые выдвинуто положение, что основными разделами экономической теории являются статика, динамика и генетика, причем экономическая генетика до сих пор не получила своего развития.

Традиционная экономическая теория остается эффективной в случаях, когда система не проявляет склонности перехода к хаосу, других существенно нелинейных эффектов. Эта ситуация похожа на ситуацию в физике после открытия теории относительности: классическая механика сохранила сферу применимости в том диапазоне значений параметров модели, где релятивистские эффекты незначительны.

1.4.2. ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ КАК СПОСОБ ИЗОБРАЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим построение фазовой плоскости для автономной, вообще говоря, нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = f_0(x, y). \end{cases} \quad (1.4.2.1)$$

Заметим, что эта система эквивалентна одному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_0(x, y). \quad (1.4.2.2)$$

Напомним, что система называется автономной, если правые части явным образом не зависят от времени t .

Для наглядного изображения состояний системы вводится плоскость xOy , в которой графически можно изобразить картину протекания динамического процесса. Эту плоскость называют фазовой, а фазовая плоскость с изображенными на ней траекториями движения и особыми точками называется фазовым портретом.

Дифференциальное уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_0(x, y)}{y}. \quad (1.4.2.3)$$

Состояниям равновесия $y = 0$ соответствует уравнение

$$f_0(x, 0) = 0. \quad (1.4.2.4)$$

Корни этого уравнения определяют равновесные значения координаты $x = x_s$. Точки с координатами $(x_s, 0)$ называются особыми точками дифференциального уравнения (1.4.2.2) или системы (1.4.2.1). Все остальные точки фазовой плоскости называются регулярными. Через любую регулярную точку проходит только одна фазовая траектория.

Нелинейная система может иметь несколько состояний равновесия. Число этих состояний равно числу действительных корней уравнения (1.4.2.4). По структуре фазовых траекторий вблизи особой точки можно определить устойчивость или неустойчивость соответствующего этой особой точке состояния равновесия. Для систем с одной степенью свободы особые точки, соответствующие дискретным устойчивым и неустойчивым положениям равновесия, чередуются на фазовой плоскости. Устойчивые особые точки отличаются тем, что с течением времени точка, соответствующая состоянию моделируемой системы, движется либо по замкнутой траектории (центр), либо приближается к особой точке (устойчивый фокус и устойчивый узел). Вблизи неустойчивых особых точек движение точек, соответствующих состоянию системы, характеризуется удалением от особой точки (неустойчивый фокус и неустойчивый узел).

Рассмотрим исследование поведения фазовых траекторий вблизи особых точек на примере линеаризованной системы дифференци-

альных уравнений второго порядка. В уравнении фазовых траекторий (1.4.2.3) выделим линейные части:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy + f_1(x, y)}{ax + by + f_2(x, y)}. \quad (1.4.2.5)$$

Пуанкаре показал, что дифференциальное уравнение (1.4.2.5), в котором при $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ стремятся к нулю как $x^2 + y^2$, и коэффициенты a, b, c, d таковы, что определитель $\Delta = ad - bc \neq 0$ имеет в начале координат $x = y = 0$ те же особенности, что и более простое линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}. \quad (1.4.2.6)$$

При этом исходной системе (1.4.2.1) будет соответствовать более простая линейная система вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases} \quad (1.4.2.7)$$

Исследование случаев, какие могут встретиться при интегрировании линейных систем, в случае системы второго порядка (в некоторых приложениях, в частности в механике, такие системы называются системами с одной степенью свободы) допускает замечательную геометрическую интерпретацию, наглядно демонстрирующую поведение системы в возмущенном движении вблизи исследуемого невозмущенного состояния. Соответствующие системе (1.4.2.1) линеаризованные уравнения (1.4.2.7) можно трактовать как уравнения, определяющие проекции скорости точки, изображающей состояние системы, движущейся в фазовой плоскости Oxy . Невозмущенному движению $x = y = 0$ на этой плоскости соответствует равновесное состояние изображающей точки в начале координат, так как, когда $x = y = 0$, $dx/dt = dy/dt = 0$. Уравнение (1.4.2.6) является уравнением фазовых траекторий.

Начало координат, изображающее равновесное состояние, есть особая точка фазовой траектории, так как здесь $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Это единственная особая точка уравнения (1.4.2.6) на плоскости Oxy .

Для приведения системы (1.4.2.7) к виду, называемому каноническим, введем новые переменные ξ , η , которые связаны с прежними переменными x , y следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \xi = \gamma_{11}x + \gamma_{12}y \\ \eta = \gamma_{21}x + \gamma_{22}y. \end{cases} \quad (1.4.2.8)$$

Чтобы это преобразование было невырожденным, необходимо выполнения условия

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1.4.2.9)$$

Это характеристическое уравнение для системы (1.4.2.7). Корни этого уравнения дают возможность судить об устойчивости невозмущенного движения рассматриваемой системы.

Если уравнение (1.4.2.9) имеет простые корни или один кратный, но с простыми элементарными делителями, то уравнения (1.4.2.7) могут быть приведены к каноническим уравнениям вида

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi \\ \frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta. \end{cases} \quad (1.4.2.10)$$

Если корень (1.4.2.9) λ — двойной, то каноническая система будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \lambda \xi \\ \frac{d\eta}{dt} = \xi + \lambda \eta. \end{cases} \quad (1.4.2.11)$$

Возможны четыре варианта, каждому из которых будет соответствовать особый тип расположения фазовых траекторий около начала координат, являющегося особой точкой, соответствующей невозмущенному равновесному состоянию системы. Этими типами расположения фазовых траекторий около начала и будет геометрически определяться характер устойчивости невозмущенного состояния системы.

1-й вариант. Корни уравнения (1.4.2.9) вещественные и одного знака. Если при этом корни λ_1 и λ_2 простые, то

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta. \quad (1.4.2.12)$$

Пусть оба корня отрицательны: $\lambda_1 = -\mu_1^2$, $\lambda_2 = -\mu_2^2$. Тогда решения уравнений (1.4.2.12) будут иметь вид

$$\xi = \alpha e^{-\mu_1^2 t}, \quad \eta = \beta e^{-\mu_2^2 t},$$

где α, β — постоянные интегрирования, причем $\alpha\beta < 0$. Когда $t \rightarrow \infty$, $\xi \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$. При этом если $\mu_1^2 < \mu_2^2$, то

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_2 \eta}{\lambda_1 \xi} = \frac{\mu_2^2 \beta}{\mu_1^2 \alpha} e^{(\mu_1^2 - \mu_2^2)t}.$$

Очевидно, что $\frac{d\eta}{d\xi} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Фазовые траектории касаются оси ξ в начале координат (варианты 3 и 5 в табл. 1.4.2.1), стрелки указывают направление движения изображающей точки по фазовым траекториям.

Это направление определяется знаками λ_1 и λ_2 : если λ_1 и λ_2 отрицательны, то движение направлено к началу координат (вариант 3 в табл. 1.4.2.1). Если λ_1 и λ_2 положительны, то движение направлено от начала координат (вариант 5 в табл. 1.4.2.1). Особая точка в начале координат носит в этом случае название узла — устойчивого в случае, представленном как вариант 3 в табл. 1.4.2.1, и неустойчивого в случае, представленном как вариант 5 в табл. 1.4.2.1. Устойчивый узел соответствует устойчивому равновесному состоянию $x = y = 0$, неустойчивый — неустойчивому. Здесь имеет место асимптотическая устойчивость.

Если $\mu_1^2 > \mu_2^2$, то по отношению к фазовым траекториям оси координат меняются ролями, но общий характер поведения фазовых траекторий вблизи начала координат остается прежним. При этом особая точка является узлом, устойчивым или неустойчивым в зависимости от знака λ .

Каноническая форма уравнения (1.4.2.12) сохраняется в одном случае равных корней, когда $a = d$, $b = c = 0$. В этом случае уравнение (1.4.2.9) имеет вид

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для него получаем двойной корень $\lambda_1 = \lambda_2 = a$. В этом случае уравнения (1.4.2.7) принимают вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = ay. \end{cases}$$

Отсюда следует: $\ln(y) = \ln(x) + \ln(a)$, или $y = ax$. Фазовые траектории являются прямыми, заканчивающимися (вариант 7 в табл. 1.4.2.1) или начинающимися (вариант 8 в табл. 1.4.2.1) в начале координат, что также соответствует устойчивому или неустойчивому узлу.

Когда корни характеристического уравнения (1.4.2.9) равны между собой, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, уравнения (1.4.2.7) приводятся к виду (1.4.2.11). Пусть $\lambda_1 = -\mu^2$. Тогда $\xi = \alpha e^{-\mu^2 t}$, $\eta = (\alpha t + \beta) e^{-\mu^2 t}$. Отсюда можно получить

$$\eta = (\alpha t + \beta) \frac{\xi}{\alpha}. \quad (1.4.2.13)$$

При любых α и β изображающая точка неограниченно приближается к началу при $t \rightarrow \infty$, причем фазовые траектории касаются в начале оси η , так как при $\alpha \neq 0$, и при $t \rightarrow \infty \frac{d\eta}{d\xi} \rightarrow \infty$.

Из (1.4.2.13) видно, что каждая траектория пересекает один раз ось ξ в момент $t = -\beta/\alpha$. Кроме того, локальный экстремум траектории определяется из условия $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$ и достигается при $t = \frac{\alpha - \beta\mu^2}{\alpha\mu^2}$.

Фазовые траектории представлены вариантами 9 и 10 в табл. 1.4.2.1. Эти особые точки также являются устойчивым и неустойчивым узлами.

2-й вариант. Корни характеристического уравнения (1.4.2.9) вещественные, противоположных знаков. Так как корни простые, то каноническая система имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi \\ \frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta. \end{cases}$$

Положим $\lambda_1 = -\lambda$, $\lambda_2 = \mu$, ($\lambda, \mu > 0$). Тогда $\xi = \alpha e^{-\lambda t}$, $\eta = \beta e^{\mu t}$. Уравнение фазовых траекторий имеет вид $\xi\eta = \alpha\beta e^{(\mu-\lambda)t}$.

Фазовые траектории имеют вид гипербол (вариант 6 в табл. 1.4.2.1). Особая точка в начале координат называется в этом случае *седлом*. Ей соответствует неустойчивое равновесие. В некоторых классификациях это состояние равновесия относят к полустойчивым.

3-й вариант. Корни характеристического уравнения комплексные с неравной нулю вещественной частью. Каноническая система будет в этом случае иметь вид

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \lambda\xi \\ \frac{d\bar{\xi}}{dt} = \bar{\lambda}\bar{\xi}. \end{cases} \quad (1.4.2.14)$$

Черточки сверху обозначают комплексно сопряженные величины.

Обозначим: $\lambda = \alpha + i\beta$, $\xi = u + iv$; тогда $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, $\bar{\xi} = u - iv$; i — мнимая единица. С учетом этих обозначений (1.4.2.14) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + i \frac{dv}{dt} &= (\alpha + i\beta)(u + iv); \\ \frac{du}{dt} - i \frac{dv}{dt} &= (\alpha - i\beta)(u - iv). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \alpha u - \beta v \\ \frac{dv}{dt} = \alpha v + \beta u. \end{cases} \quad (1.4.2.15)$$

Введем на плоскости (u, v) полярные координаты: $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$. Тогда уравнения (1.4.2.15) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} &= \alpha r \cos \theta - \beta r \sin \theta; \\ \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} &= \alpha r \sin \theta + \beta r \cos \theta. \end{aligned}$$

Отсюда получаем $\frac{dr}{dt} = \alpha r$, $\frac{d\theta}{dt} = \beta$. Уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\alpha}{\beta} r.$$

Интегрируя это уравнение, имеем $\ln r = \frac{\alpha}{\beta} \theta + \ln C$, или $r = Ce^{\frac{\alpha}{\beta} \theta}$.

Фазовые траектории являются логарифмическими спиралями, вложенными одна в другую, с асимптотической точкой в начале координат. При этом если $\alpha < 0$ (вещественная часть отрицательна), то с возрастанием θ величина r убывает и кривая имеет вид, соответствующий варианту 2 табл. 1.4.2.1. Это так называемый устойчивый фокус. Если $\alpha > 0$, то r растет вместе с θ . Особая точка в этом случае называется неустойчивым фокусом (вариант 4 табл. 1.4.2.1). При движении по траектории точка в первом случае асимптотически приближается к началу, во втором — удаляется от него.

4-й вариант. Корни характеристического уравнения чисто мнимые ($\alpha = 0$). В этом случае $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$.

Уравнения фазовых траекторий в полярных координатах будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = 0 \\ \frac{d\theta}{dt} = \beta. \end{cases}$$

Отсюда $r = \text{const} = r_0$, $\theta = \beta t + \theta_0$.

В этих координатах фазовые траектории — окружности, описываемые изображающей точкой вокруг начала координат с угловой скоростью β . Особая точка в этом случае носит название «центр». Равновесие, изображаемое особой точкой типа «центр», является устойчивым равновесием (вариант 1 табл. 1.4.2.1).

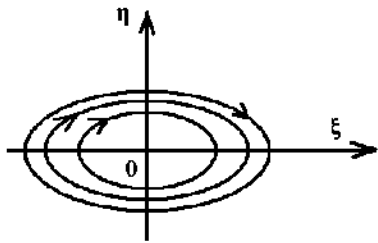
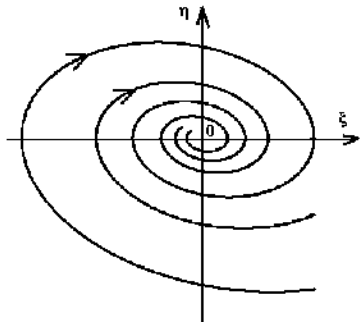
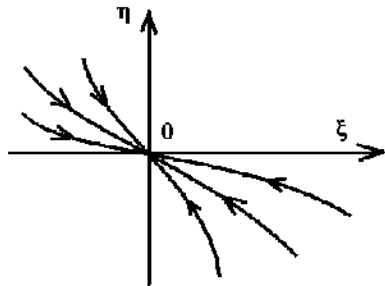
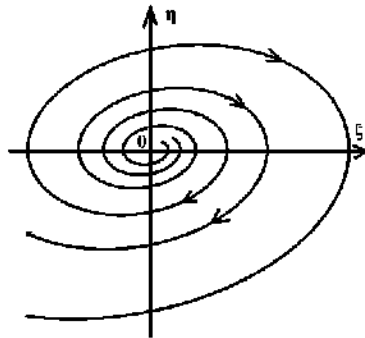
При изменении параметров системы может меняться тип особой точки.

Рассмотрим для определенности уравнение собственных колебаний простейшей динамической системы — линейного осциллятора:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c_1 x = 0. \quad (1.4.2.16)$$

Таблица 1.4.2.1

Основные типы особых точек

№ п/п	Тип особой точки	Особенности	Фазовый портрет
1	Центр	Особая точка типа «центр» соответствует устойчивому состоянию равновесия. Траектории являются замкнутыми и соответствуют периодическим движениям около положения равновесия	
2	Устойчивый фокус	Траектории сходятся к положению равновесия, при этом реализуются затухающие колебания	
3	Устойчивый узел	Траектории сходятся к положению равновесия, движение не имеет характера колебаний	
4	Неустойчивый фокус	Траектории удаляются от положения равновесия, движение имеет характер колебаний с увеличивающейся амплитудой	

Продолжение табл. 1.4.2.1

№ п/п	Тип особой точки	Особенности	Фазовый портрет
5	Неустойчивый узел	Траектории удаляются от положения равновесия, движение имеет аperiodический характер	
6	Седло	По некоторым направлениям траектории приближаются к особой точке, по другим направлениям — удаляются. Эта особая точка является неустойчивой (в некоторых классификациях ее относят к полуустойчивым)	
7	Разновидность устойчивого узла	Возникает в случае равных корней характеристического уравнения при $a = d$, $b = c = 0$	
8	Разновидность неустойчивого узла	Возникает в случае равных корней характеристического уравнения при $a = d$, $b = c = 0$	

№ п/п	Тип особой точки	Особенности	Фазовый портрет
9	Разновидность устойчивого узла	Возникает в случае равных корней характеристического уравнения	
10	Разновидность неустойчивого узла	Возникает в случае равных корней характеристического уравнения	

Это уравнение является частным случаем уравнения (1.4.2.2) при $f_0(x, y) = -\frac{c_1}{m}x$. Это же уравнение следует с точностью до обозначений из (1.3.2.5) при отсутствии внешнего воздействия и сопротивления. Соответствующая этому уравнению система двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{c_1}{m}x. \end{cases} \quad (1.4.2.17)$$

Координаты особой точки найдем из решения следующего из (1.4.2.4) уравнения: $-\frac{c_1}{m}x = 0$, откуда получаем координаты особой точки: $x = 0, y = 0$.

Решение линейного дифференциального уравнения (1.4.2.16) будем искать в виде $x(t) = Ce^{kt}$. Подставляя это решение в (1.4.2.16), после очевидных преобразований получаем уравнение, называемое характеристическим:

$$mk^2 + c_1 = 0.$$

Тот же вид уравнения получается из (1.4.2.9). В рассматриваемом частном случае $a = 0$, $b = 1$, $c = -c_1/m$, $d = 0$. Подставляя эти значения и раскрывая определитель в (1.4.2.9), получаем тот же вид характеристического уравнения.

При $m > 0$, $c_1 > 0$ получаем решение $k = i\sqrt{\frac{c_1}{m}}$ (i — мнимая единица). В результате решение уравнения (1.4.2.16) можем записать в виде

$$x(t) = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt) \quad (1.4.2.18)$$

или

$$x(t) = A \sin(kt + \alpha), \quad (1.4.2.19)$$

где $k = \sqrt{\frac{c_1}{m}}$; $C_1 = A \sin \alpha$; $C_2 = A \cos \alpha$. Параметр A имеет смысл амплитуды колебаний, α — начальной фазы колебаний, k — частоты колебаний. Период колебаний $T = 2\pi/k$. Такое решение называется гармоническим.

Параметры A и α (или C_1 и C_2) определяются из начальных условий $x(0) = x_0$, $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = x_1$. Получаем: $C_1 = x_0$, $C_2 = x_1/k$,

$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_1^2}{k^2}}$, $\alpha = \arctg \frac{kx_0}{x_1}$. Частота k и период T не зависят от начальных условий. Таким образом, найдено точное решение уравнения (1.4.2.16) в виде (1.4.2.18) или (1.4.2.19).

Найдем уравнение фазовых траекторий для этого решения. Из (1.4.2.3) следует, что $\frac{dy}{dx} = -\frac{c_1 x}{m y}$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$y^2 + \frac{c_1}{m} x^2 = 2C_3, \quad (1.4.2.20)$$

где C_3 — константа интегрирования (множитель 2 можно опустить).

Семейство кривых (1.4.2.20) представляет собой концентрические эллипсы (вариант 1 табл. 1.4.2.1), точка (0,0) является особой точкой типа «центр» (рис. 1.4.2.1).

Рассмотрим вариант, когда параметр c_1 в уравнении (1.4.2.16) отрицателен: $c_1 < 0$. По-прежнему считаем, что параметр $m > 0$. Такого

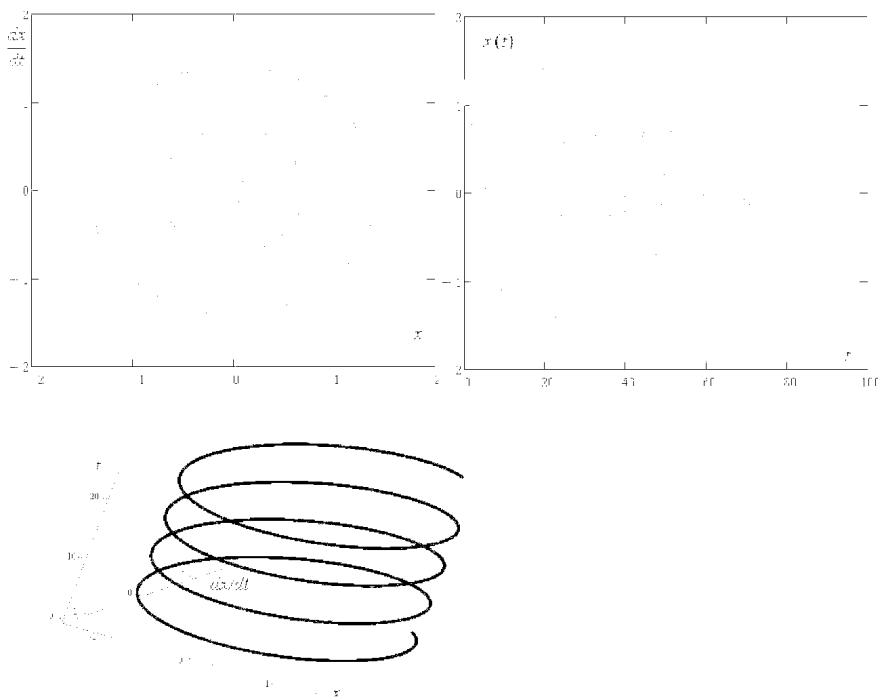


Рис. 1.4.2.1. Фазовый портрет, решения и трехмерное пространство одного из решений уравнения (1.4.2.16) при $m = 1$, $c_1 = 1$. Решения отличаются начальными условиями

рода системы называются системами с отрицательной жесткостью. В моделях экономической динамики эта ситуация встречается в модели динамики валового продукта (1.2.3.1).

Решение уравнения (1.4.2.16) в этой ситуации имеет вид

$$x(t) = C_4 e^{k_1 t} + C_5 e^{-k_1 t}, \quad (1.4.2.21)$$

где $k_1 = \sqrt{-\frac{c}{m}}$.

По виду решения (1.4.2.21) видно, что оно неограниченно возрастает при $t \rightarrow \infty$. Уравнение фазовых траекторий (1.4.2.20) имеет тот же вид, что и в предыдущем варианте, однако в нем параметр $c_1 < 0$. Это уравнение определяет серию гипербол (вариант 6 в табл. 1.4.2.1), особая точка является точкой седлового типа.

Учтем в модели малое сопротивление, пропорциональное скорости с коэффициентом b . Такие колебания называются свободными. Уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + c_1 x(t) = 0. \quad (1.4.2.22)$$

Считаем, что $m > 0$, $c_1 > 0$, $b > 0$. Удобнее разделить это уравнение на коэффициент при старшей производной m . Получим:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2n \frac{dx(t)}{dt} + k^2 x(t) = 0. \quad (1.4.2.23)$$

Эквивалентная система двух уравнений первого порядка имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -k^2 x - 2ny. \end{cases}$$

В рассматриваемом варианте $f_0(x, y) = -k^2 x - 2ny$. Координаты особой точки найдем из условия (1.4.2.4). Получаем те же координаты, что и в предыдущем варианте: особой точкой является точка $(0, 0)$.

Решение уравнения (1.4.2.23) ищем в виде $x(t) = Ce^{zt}$. Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (1.4.2.23), имеет вид

$$z^2 + 2nz + k^2 = 0. \quad (1.4.2.24)$$

Корни этого уравнения суть: $z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$. Рассмотрим несколько вариантов:

1) $n < k$. Это условие является математическим отражением понятия «малое сопротивление», или «малая диссипация». Корни уравнения (1.4.2.13) комплексные:

$$z_1 = -n + ik_1, z_2 = -n - ik_1, k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}, i = \sqrt{-1}.$$

Решение уравнения (1.4.2.23) имеет вид

$$x(t) = e^{-nt} [C_6 \cos(k_1 t) + C_7 \sin(k_1 t)]. \quad (1.4.2.25)$$

Определяя константы C_6 , C_7 из начальных условий $x(0) = x_0$, $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = x_1$, получаем:

$$x(t) = e^{-nt} \left(x_0 \cos(k_1 t) + \frac{x_1 + nx_0}{k_1} \sin(k_1 t) \right). \quad (1.4.2.26)$$

Введем вместо постоянных C_6, C_7 новые постоянные A_1, β в соответствии с формулами: $C_6 = A_1 \sin \beta, C_7 = A_1 \cos \beta$. Тогда решение (1.4.2.26) представляется в следующем виде:

$$x(t) = A_1 e^{-nt} \sin(k_1 t + \beta). \quad (1.4.2.27)$$

Из этого решения видно, что амплитуда колебаний убывает по экспоненциальному закону, асимптотически приближаясь к нулю. Колебания являются затухающими. Также можно заметить, что $x(t)$ меняет знак периодически, т.е. система проходит положение равновесия через одинаковые промежутки времени. Этот промежуток условно называется периодом затухающих колебаний, так как решение (1.4.2.27) не является периодическим. Частота колебаний k_1 этого решения отличается от частоты колебаний k соответствующей задачи о собственных колебаниях при $b = 0$.

Перейдем к исследованию траекторий вблизи особой точки $(0, 0)$.

Уравнение для фазовых траекторий (1.4.2.3) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = -k^2 \frac{x}{y} - 2n. \quad (1.4.2.28)$$

Решение этого уравнения определяет серию спиралей (вариант 2 в табл. 1.4.2.1), и особая точка $(0, 0)$ является устойчивым фокусом (рис. 1.4.2.2).

2) $n > k$. Это условие является математическим отражением понятия «большое сопротивление», или «большая диссипация». Оба корня уравнения (1.4.2.24) вещественные и отрицательные:

$$z_1 = -n + k_2 < 0, z_2 = -n - k_2 < 0, k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Решение уравнения (1.4.2.23) имеет вид

$$x(t) = e^{-nt} (C_8 e^{k_2 t} + C_9 e^{-k_2 t}). \quad (1.4.2.29)$$

Последнее решение можно записать в виде

$$x(t) = e^{-nt} [(C_{10} \operatorname{ch}(k_2 t) + C_{11} \operatorname{sh}(k_2 t))]. \quad (1.4.2.30)$$

Участвующие в последних двух формулах постоянные связаны следующими зависимостями: $2C_8 = C_{10} + C_{11}, C_9 = C_{10} - C_{11}$.

Определяя константы C_{10}, C_{11} из начальных условий $x(0) = x_0, \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = x_1$, получаем:

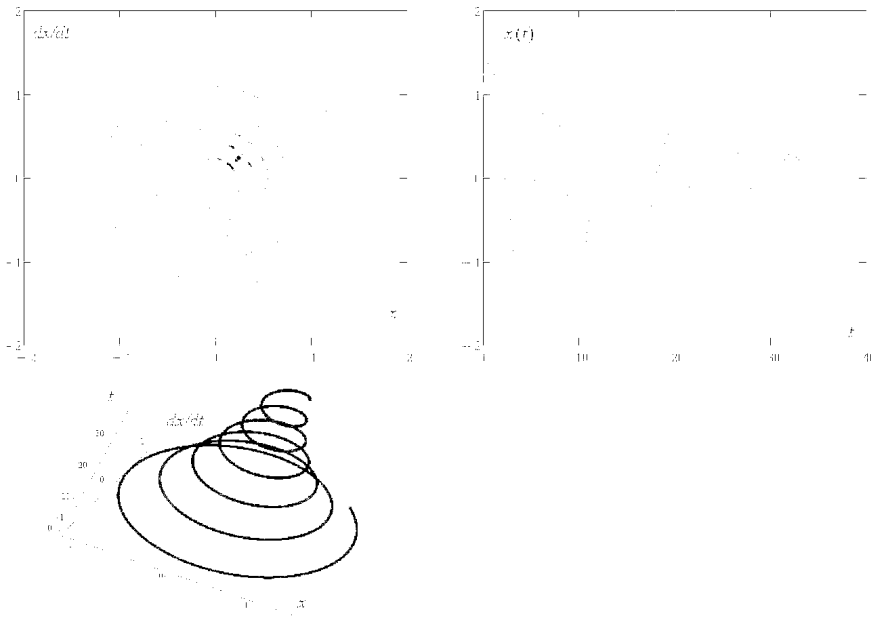


Рис. 1.4.2.2. Фазовый портрет, решение и трехмерное пространство решения уравнения 1.4.2.23 при $n = 0,05$; $k = 1$. Устойчивый фокус

$$x(t) = e^{-nt} \left[x_0 \operatorname{ch}(k_2 t) + \frac{x_1 + nx_0}{k_2} \operatorname{sh}(k_2 t) \right]. \quad (1.4.2.31)$$

Так как корни характеристического уравнения отрицательны, из этого решения видно, что амплитуда колебаний убывает по экспоненциальному закону, асимптотически приближаясь к нулю. Однако, в отличие от предыдущего случая, колебания отсутствуют. Движение является аperiодическим. Перейдем к исследованию траекторий вблизи особой точки $(0, 0)$.

Уравнение для фазовых траекторий (1.4.2.3) в рассматриваемом случае имеет вид (1.4.2.28). Решение этого уравнения определяет серию кривых (вариант 3 в табл. 1.4.2.1), и особая точка $(0, 0)$ является устойчивым узлом (рис. 1.4.2.3).

3) $n = k$. Корни характеристического уравнения в этом случае вещественные и равные. Общее решение уравнения (1.4.2.23) имеет вид

$$x(t) = e^{-nt} (C_{12}t + C_{13}). \quad (1.4.2.32)$$

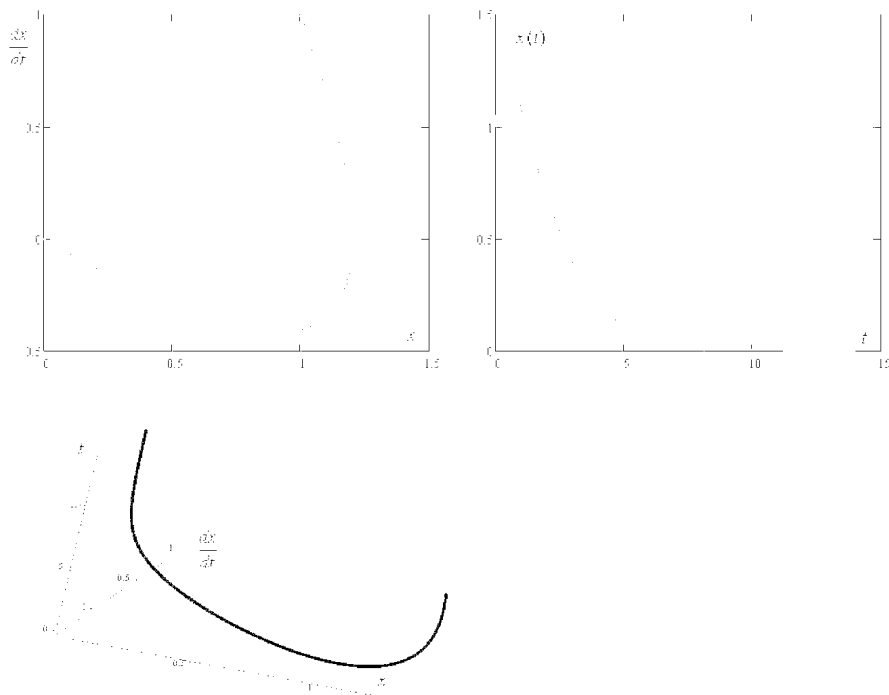


Рис. 1.4.2.3. Фазовый портрет, решение и трехмерное пространство решения уравнения 1.4.2.23 при $n = 1, 1; k = 1$. Устойчивый узел

Движение является аperiодическим. Особая точка — устойчивый узел.

Можно показать, что в случае изменения параметра сопротивления b от нуля в отрицательную сторону ($b < 0$) центр переходит в неустойчивый фокус (вариант 4 в табл. 1.4.2.1), который с дальнейшим уменьшением параметра b переходит в неустойчивый узел (вариант 5 в табл. 1.4.2.1) (рис. 1.4.2.4).

Мы рассмотрели построение фазовых траекторий вблизи особых точек на примере простого линейного дифференциального уравнения, которое имеет аналитическое решение. Заметим, что для анализа особых точек построения решения не требуется. Именно этот факт является основой качественной теории обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Решение уравнения не строится, а анализируется фазовый портрет — фазовая плоскость, особые точки, поведение траекторий, разбиение фазовой плоскости. Этот аппарат рассматривается далее, и приведенные выше результаты являются важным для понимания частным случаем общей качественной теории.

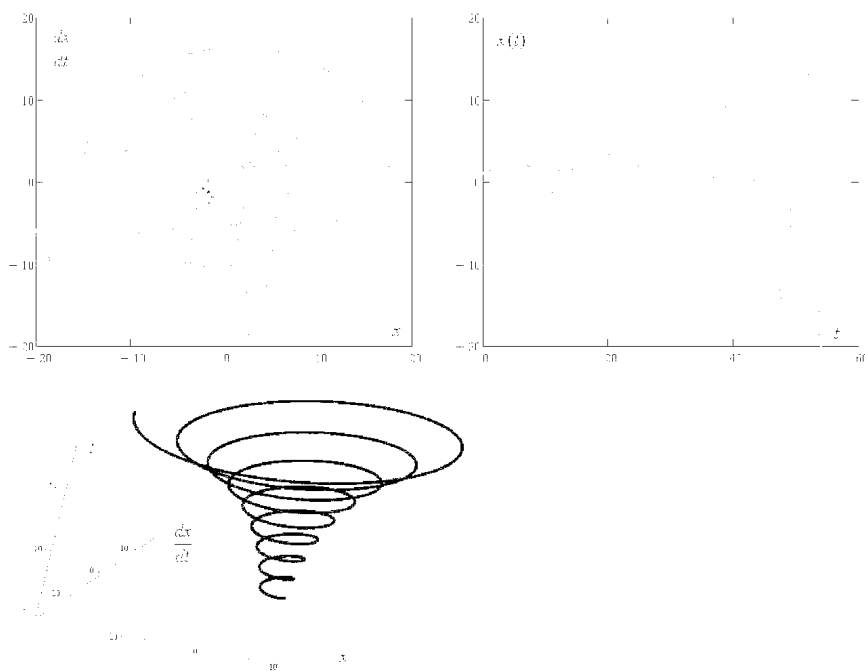


Рис. 1.4.2.4. Фазовый портрет, решение и трехмерное пространство решения уравнения 1.4.2.23 при $n = -0,05$; $k = 1$. Неустойчивый фокус

Рассмотрим общие свойства фазовых траекторий.

- в верхней полуплоскости ($y > 0$) изображающая точка на любой фазовой траектории движется в направлении возрастания координаты x , т.е. слева направо, а в нижней полуплоскости ($y < 0$) — в направлении убывания x , т.е. справа налево; таким образом, точка по фазовой траектории движется по часовой стрелке. Замена времени $\tau = -t$ (введение в модели обратного отсчета времени) изменяет направление этого движения на противоположное. При такой замене устойчивые динамические процессы становятся неустойчивыми, и наоборот;
- в регулярных точках оси x фазовые траектории пересекают эту ось под прямым углом;
- в регулярных точках, не лежащих на оси x , фазовая траектория не может иметь касательной, параллельной оси y ;
- если какая-либо непрерывная фазовая траектория последовательно пересекает ось x в двух регулярных точках, то между этими точками находится по крайней мере одна особая точка;

- в интервале времени, в котором непрерывная фазовая траектория не пересекает ось x , она может пересечь любую прямую, параллельную оси y , не более одного раза;
- периодическим режимам движения соответствуют замкнутые фазовые траектории.

Изолированные замкнутые фазовые траектории (т.е. замкнутые траектории, в окрестности которых нет других замкнутых траекторий) называют *предельными циклами*. Предельный цикл называют устойчивым, если любая фазовая траектория, начинающаяся в достаточно малой окрестности этого цикла, неограниченно к нему приближается; соответствующее предельному циклу движение динамической системы представляет собой установившиеся автоколебания. В противоположном случае предельный цикл называется неустойчивым; движение динамической системы, соответствующее неустойчивому предельному циклу, нереализуемо.

Часть фазовой плоскости, в которой располагаются все фазовые траектории, стремящиеся к данному предельному циклу, называют областью притяжения этого цикла. Неустойчивые предельные циклы разделяют фазовую плоскость на области притяжения к особым точкам или устойчивым предельным циклам. Устойчивые и неустойчивые предельные циклы чередуются на фазовой плоскости.

Изолированные фазовые траектории, проходящие через особую точку типа «седло», называют сепаратрисами. Движение динамической системы, соответствующее движению изображающей точки по сепаратрисе, неустойчиво и нереализуемо. Сепаратрисы разделяют фазовую плоскость на области начальных условий, приводящих к движениям принципиально различных типов.

В табл. 1.4.2.2 содержится информация об особых точках типичных нелинейных динамических систем.

Таблица 1.4.2.2

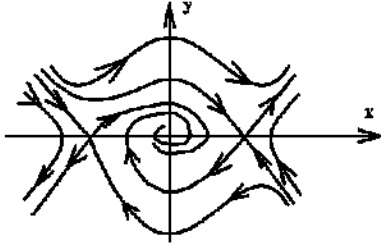
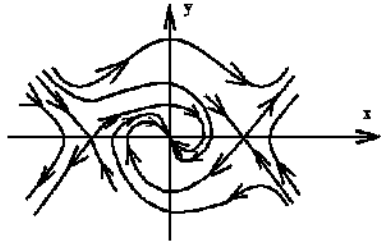
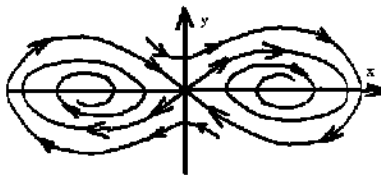
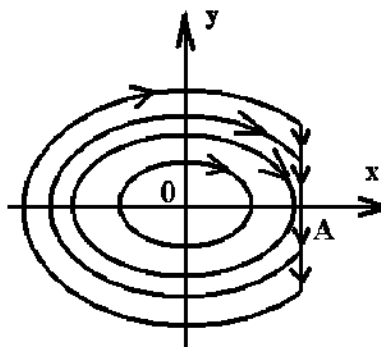
Особые точки типичных нелинейных динамических систем

Уравнение	Особые точки	Фазовый портрет
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + k^2x(t) + \gamma x^3(t) = 0$	Одна особая точка (центр)	

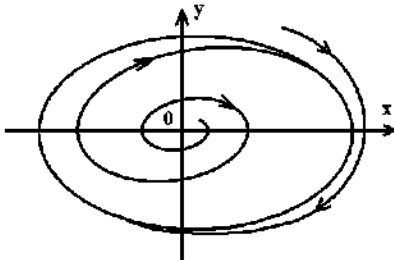
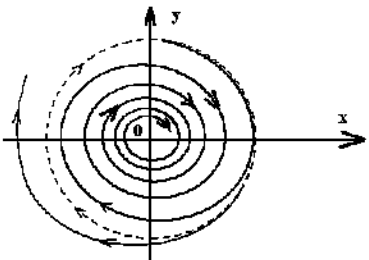
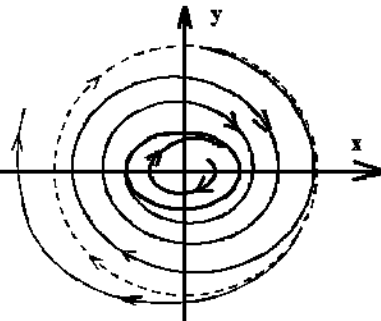
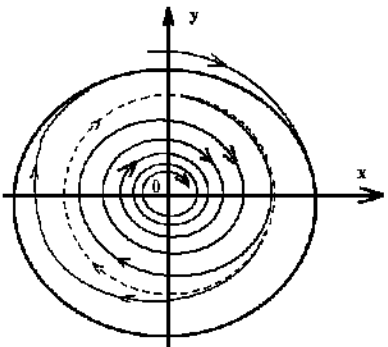
Продолжение табл. 1.4.2.2

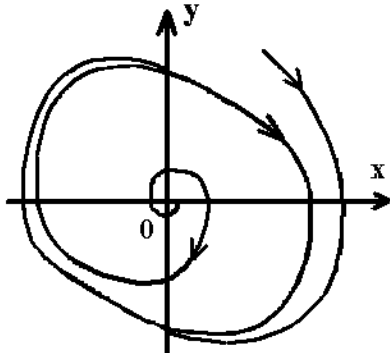
Уравнение	Особые точки	Фазовый портрет
$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k^2 x(t) - \gamma x^3(t) = 0$	Три особые точки (один центр и два седла)	
$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - k^2 x(t) + \gamma x^3(t) = 0$	Три особые точки (одно седло и два центра)	
$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - k^2 x(t) - \gamma x^3(t) = 0$	Одна неустойчивая особая точка (седло)	
$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2n \frac{dx(t)}{dt} + k^2 x(t) + \gamma x^3(t) = 0 \quad (n < k)$	Одна особая точка (устойчивый фокус)	

Продолжение табл. 1.4.2.2

Уравнение	Особые точки	Фазовый портрет
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2n \frac{dx(t)}{dt} + k^2x(t) - \gamma x^3(t) = 0 \quad (n < k)$	Три особые точки (устойчивый фокус и два седла)	
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2n \frac{dx(t)}{dt} + k^2x(t) - \gamma x^3(t) = 0 \quad (n > k)$	Три особые точки (устойчивый узел и два седла)	
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2n \frac{dx(t)}{dt} - k^2x(t) + \gamma x^3(t) = 0 \quad (n < k)$	Три особые точки (два устойчивых фокуса и седло)	
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f_0(x),$ $f_0(x) = k^2x(t)$ при $x < A$, $f_0(x) > k^2x(t)$ при $x = A$	Одна устойчивая особая точка (центр). Система с ограничителем	

Продолжение табл. 1.4.2.2

Уравнение	Особые точки	Фазовый портрет
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_3 \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^3 + k^2 x(t) = 0$	Одна особая точка (неустойчивый фокус). Один устойчивый предельный цикл. Мягкое возбуждение автоколебаний	
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} - b_3 \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^3 + k^2 x(t) = 0$	Одна особая точка (устойчивый фокус). Один неустойчивый предельный цикл (обозначен пунктирной линией)	
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_3 \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^3 - b_5 \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^5 + k^2 x(t) = 0$	Одна особая точка (неустойчивый фокус). Один устойчивый и один неустойчивый предельные циклы. Мягкое возбуждение автоколебаний	
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} - b_3 \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^3 + b_5 \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^5 + k^2 x(t) = 0$	Одна особая точка (устойчивый фокус). Один неустойчивый и один устойчивый предельные циклы. Жесткое возбуждение автоколебаний	

Уравнение	Особые точки	Фазовый портрет
$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - b_0(1 - x^2(t)) \frac{dx(t)}{dt} + k^2 x(t) = 0$ Уравнение Ван-дер-Поля	Одна особая точка (неустойчивый фокус). Один устойчивый предельный цикл. Мягкое возбуждение автоколебаний	

1.4.3. СТАТИЧЕСКАЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

Переходя к анализу устойчивости динамических процессов, сразу отметим терминологическое пересечение понятий. Одним и тем же термином «устойчивость» принято обозначать не всегда совпадающие явления.

Начнем с самого простого варианта — устойчивость статического (неподвижного) положения равновесия. Рассмотрим простейший физический пример. В поле силы тяжести с ускорением свободного падения g построен профиль (рис. 1.4.3.1). В нем есть минимумы уровня (точки 2, 5), участок горизонтальной поверхности (окрестность точки 1), максимум (точка 4). Шарик массой m помещается в эти точки. Устойчивыми положениями статического равновесия на интуитивном уровне мы считаем такие, в которые шарик будет воз-

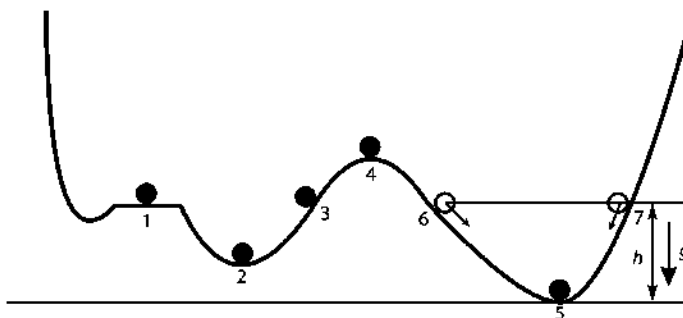


Рис. 1.4.3.1. Статическая и динамическая устойчивость

вращаться под действием силы тяжести при небольших отклонениях. Устойчивыми положениями являются точки 2 и 5 — точки локальных минимумов потенциальной энергии. Неустойчивой является точка равновесия 4 — точка локального максимума потенциальной энергии. Точка 3 не является точкой равновесия. Точка 1 является точкой безразличного равновесия — потенциальная энергия в ее окрестности постоянна.

Для консервативных систем имеет место теорема об устойчивости состояния равновесия. Для устойчивости изолированного положения равновесия системы с голономными и стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы потенциальная энергия системы в этом положении принимала минимальное значение.

В этом простейшем примере мы рассматриваем консервативную систему, в которой сохраняется общая энергия. Если мы отклоним шарик на высоту h в точку 6, он будет совершать колебания с постоянной амплитудой вокруг точки 5 от точки 6 до точки 7, находящейся на той же высоте h . Этот уже не статический, а динамический процесс устойчив в интуитивном понимании — общая энергия постоянна, амплитуда постоянна. Заметим, что, если кривая профиля на участке колебаний точка 6 — точка 5 — точка 7 является квадратичной параболой, колебания моделируются уравнением линейного осциллятора. В случае если эта кривая не является квадратичной параболой, уравнение движения является нелинейным и имеет вид (1.4.2.2). Таким образом, для простейшей интерпретации движения в форме рис. 1.4.3.1 уравнение кривой профиля следует из вида уравнения движения (1.4.2.2):

$$\Pi = \int_0^x f_0(x) dx.$$

Заметим, что потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной. Как правило, нуль потенциальной энергии устанавливается в точке глобального минимума. Отметим, что эта простейшая интерпретация нелинейных динамических систем имеет место не только для задач механики, но и в самых разнообразных приложениях. В некоторых моделях экономической динамики аналогом потенциальной энергии могут выступать обобщающие экономические показатели, например взятая с обратным знаком экономическая эффективность, прибыль.

В.И. Арнольд [1.38] приводит такую интерпретацию модели перестройки как переходного процесса от экономики административной системы к рыночной экономике (рис. 1.4.3.2). Заметим, что в выбранных координатах «предприимчивость — благосостояние» ус-

стойчивые положения соответствуют максимумам кривой на рис. 1.4.3.2.

Считается, что нелинейная система находится в установившемся устойчивом состоянии. Это состояние признается плохим, так как в пределах видимости имеется лучшее устойчивое состояние, т.е. экстремум в точке, соответствующей административной системе, является не глобальным, а локальным.

Автор приводит такие качественные положения модели:

1) постепенное движение в сторону лучшего состояния сразу приводит к ухудшению. Скорость ухудшения при равномерном движении к лучшему состоянию увеличивается;

2) по мере движения от худшего состояния к лучшему сопротивление системы изменению ее состояния растет;

3) максимум сопротивления достигается раньше, чем самое плохое состояние, через которое нужно пройти для достижения лучшего состояния. После прохождения максимума сопротивления состояние продолжает ухудшаться;

4) по мере приближения к самому плохому состоянию на пути перестройки сопротивление, начиная с некоторого момента, начинает уменьшаться; и как только самое плохое состояние пройдено, не только полностью исчезает сопротивление, но система начинает притягиваться к лучшему состоянию;

5) величина ухудшения, необходимого для перехода в лучшее состояние, сравнима с финальным улучшением и увеличивается по мере совершенствования системы. Слабо развитая система может перейти в лучшее состояние почти без предварительного ухудшения, в то время как развитая система в силу своей устойчивости на такое постепенное, непрерывное улучшение не способна;



Рис. 1.4.3.2. К теории перестроек экономической системы

б) если систему удастся скачком, а не непрерывно перевести из плохого устойчивого состояния в состояние, достаточное близко к хорошему, то дальше она сама будет эволюционировать в сторону хорошего состояния.

С этими объективными законами функционирования нелинейных систем нельзя не считаться.

Рассмотрим (рис. 1.4.3.3) поведение фазовых траекторий, отражающих движение консервативной динамической системы, потенциальная энергия которых или ее аналог соответствует изображенным на рис. 1.4.3.1 и 1.4.3.3 профилям. Для определенности профили приняты одинаковыми, но произвольными. Симметрия кривой профиля в окрестности особых точек не предполагается, но считается, что эти кривые гладкие и дифференцируемые. Это соответствует достаточно общему виду нелинейности динамической системы.

Координаты по оси x вынесены на ось, изображенную в нижней части рисунка, чтобы не загромождать рисунок. Характерные точки по оси x обозначены числами — номерами характерных точек. Выделено четыре характерных уровня энергии: $\Pi_1 < \Pi_2 < \Pi_3 < \Pi_4$. Особые точки, соответствующие положениям равновесия системы, могут иметь место при значениях x , удовлетворяющих условию $d\Pi(x)/dx = 0$. Исходя из этого особыми точками являются точки 3, точки на отрезке 4–5, точки 7, 10, 14. По виду функции $\Pi(x)$ можно судить о характере движения системы.

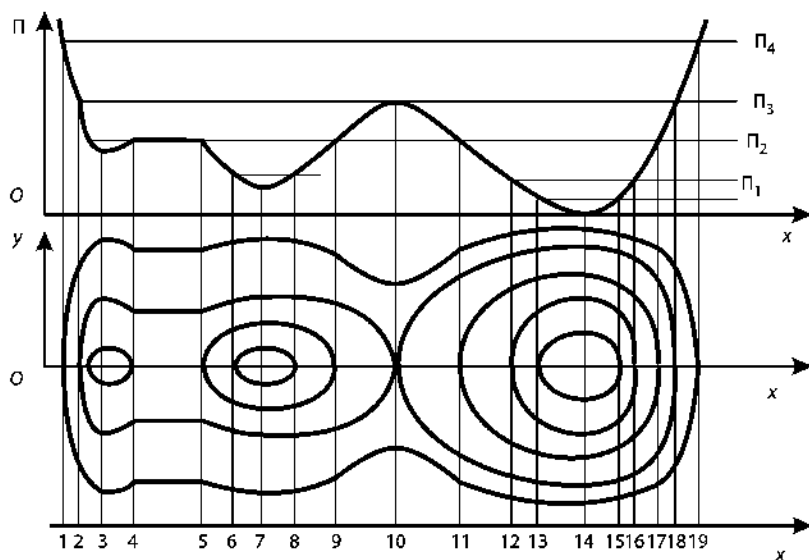


Рис. 1.4.3.3. Фазовые траектории, соответствующие различным особым точкам

При переносе начала координат из точки $x = 0$ в точки $x = x_i$ оси абсцисс уравнение фазовых траекторий (1.4.2.3) после замены переменных $\zeta = x - x_i$ с учетом консервативности рассматриваемой системы преобразуется в вид $\frac{dy}{d\zeta} = \frac{f_0(\zeta + x_i)}{y}$. Исходя из этого можно

рассматривать по единой методике характер каждой особой точки.

Точки 3, 7 и 14 являются особыми точками типа «центр». Фазовые траектории около этих особых точек — замкнутые кривые, соответствующие предельным циклам и установившимся собственным колебаниям динамической системы с амплитудой, не превосходящей порог потенциального барьера рассматриваемой особой точки. Для точки 14 порог определяется уровнем Π_3 . Для точек 3 и 7 порог определяется уровнем Π_2 . Точки на отрезке 4–5, соответствующем уровню Π_2 , являются точками безразличного статического равновесия.

Точка 10 является особой точкой седлового типа. Интегральные кривые, проходящие через седловую точку, являются сепаратрисами. В рассматриваемом примере это кривая, соответствующая уровню Π_3 . Она проходит через точки 2, 10, 18 и выделяет на фазовой плоскости области траекторий различных типов. Кроме того, в этой системе присутствует еще одна сепаратриса. Она отделяет два центра (в точках 3 и 7) и проходит через точки 2, 4; далее она соответствует отрезку прямой 4–5, потом проходит через точки 5, 9. Колебаниям с большим уровнем энергии Π_4 соответствует замкнутая кривая, проходящая через точки 1, 19. Колебаниям с малым уровнем энергии, меньшим чем Π_1 , соответствуют кривые около центров 3, 7, 14.

Этот пример построен для консервативной динамической системы и позволяет получить наглядное представление (шарик в системе лунок) о некоторых возможных видах колебаний около особых точек типа «центр» и «седло». Это наглядное представление можно перенести и на более сложные виды динамических систем. У неконсервативных систем, содержащих и другие виды особых точек, определение характера особых точек, вопрос об устойчивости периодических решений исследуются несколько сложнее, но допускаются простые интерпретации.

Перейдем к изложению понятий, связанных с устойчивостью движений нелинейных динамических систем.

Параметры динамической системы могут изменяться с течением времени. Если общие свойства системы мало изменяются при небольшом изменении параметров и эти изменения носят лишь количественный, но не качественный характер, то такая система называется структурно устойчивой или грубой. Если малое изменение какого-либо параметра приводит к качественному изменению состояния системы, то такая система называется структурно неустойчивой.

тойчивой или негрубой. Таким качественным изменениям соответствует принципиальное изменение фазового портрета — появление новых положений равновесия (особых точек), новых предельных циклов, изменение типа устойчивости решений.

При изменении параметров грубой динамической системы меняются количественные характеристики ее движения. Качественно движение не меняется. Скорость изменения количественных характеристик грубой механической системы при изменении ее параметров определяет чувствительность системы. Для негрубых систем функция чувствительности в некоторых ситуациях может стремиться к бесконечности.

Рассмотрим понятие структурной устойчивости системы на обобщенном примере профиля, изображенного на рис. 1.4.3.4 [1.39]. Пусть на кривой $\Pi(x)$ есть три участка:

- 1) участок 1, где профиль задается зависимостью $\Pi(x) = x^2$;
- 2) участок 2, где профиль задается зависимостью $\Pi(x) = x^3$;
- 3) участок 3, где профиль задается зависимостью $\Pi(x) = x^4$.

Для всех трех участков точка $x = 0$ является критической, так как производная $d\Pi(x)/dx = 0$ для каждого участка. (Здесь учтена возможность обсуждавшейся выше замены $\zeta = x - x_i$ и точки $x = 0$ для каждого участка различны.)

Первый и третий участки имеют минимум в критической точке, второй участок в критической точке имеет точку перегиба.

Пунктирной кривой отмечены непринципиальные для данного рассмотрения участки профиля. Введем в систему слабые возмущения. На участке 1 $\Pi(x) = x^2 - \mu x$, на участке 2 $\Pi(x) = x^3 - \mu x$, на участке 3 $\Pi(x) = x^4 - \mu x^2$. Параметр $0 < \mu \ll 1$ является сколь угодно малой положительной величиной.

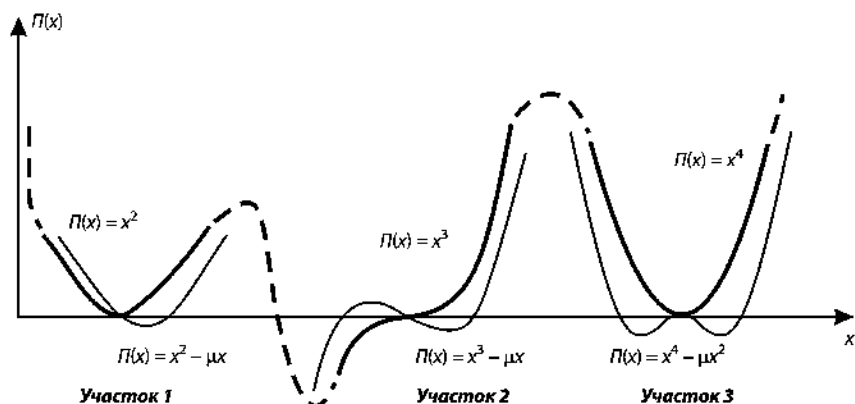


Рис. 1.4.3.4. К понятию структурной устойчивости

В результате такого малого изменения в системе на участке I принципиальных изменений не произошло. По-прежнему на этом участке для консервативной динамической системы имеется одна особая точка типа «центр», которая сместилась на малую величину $\mu/2$.

На участке 2 в результате малых изменений произошли кардинальные изменения. Появились две особые точки — седловая неустойчивая, соответствующая максимуму кривой $\Pi(x)$, и «пентр» (устойчивая особая точка), соответствующая минимуму $\Pi(x)$.

На участке 3 также произошли кардинальные изменения: на месте устойчивой особой точки типа «центр» появилась неустойчивая особая точка седлового типа, рядом появились две устойчивые особые точки типа «центр».

Таким образом, система во втором и третьем вариантах структурно неустойчива, а в первом варианте — структурно устойчива.

Рассмотрим понятие устойчивости решений динамических систем. В качестве модели примем систему n нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = X_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.4.3.1)$$

Движение системы, исследуемое на устойчивость и соответствующее заданным при $t = t_0$ начальным условиям,

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad (1.4.3.2)$$

называется невозмущенным. Невозмущенному решению соответствует частное решение

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \quad \varphi_i(t_0) = x_{i0} = \varphi_{i0}. \quad (1.4.3.2')$$

Движение системы, соответствующее начальным условиям, в которых произошли отклонения от исходных значений, будем называть возмущенным движением.

Перейдем к новым переменным

$$\delta\varphi_i(t) = x_i(t) - \varphi_i(t). \quad (1.4.3.4)$$

Уравнения (1.4.3.1) можно привести к виду:

$$\frac{d\delta\varphi_i(t)}{dt} = X_i(t, x_1 + \varphi_1, \dots, x_n + \varphi_n) - X_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.4.3.5)$$

Эти уравнения называются уравнениями возмущенного движения, а функции $\delta\varphi_i(t)$ — возмущениями.

Невозмущенное движение называется устойчивым по Ляпунову, если для любого сколь угодно малого положительного числа ϵ можно найти такое число $\delta(\epsilon)$, что для всех возмущенных движений, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^n \delta \varphi_{i0}^2 \leq \delta(\epsilon)$ при всех $t \geq t_0$, будет выполняться условие $\sum_{i=1}^n \delta \varphi_i^2 \leq \epsilon$.

Если выполняется также условие $\sum_{i=1}^n \delta \varphi_i^2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым.

Существует простая интерпретация понятия устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости. Для устойчивой по Ляпунову системы движение начинается внутри сферы радиуса $\sqrt{\delta}$ и никогда не выходит за пределы сферы радиуса $\sqrt{\epsilon}$. Асимптотически устойчивое решение стремится к невозмущенному состоянию, никогда не выходя за границы сферы радиуса $\sqrt{\epsilon}$. Если движение неустойчиво, то внутри сферы радиуса $\sqrt{\delta}$ найдется по меньшей мере одна точка, в которой начинающаяся фазовая траектория за конечное время выйдет за границу области $\sqrt{\epsilon}$.

В определении устойчивости по Ляпунову считается, что возмущенное движение происходит под действием тех же внешних воздействий, под влиянием которых происходит и невозмущенное движение. Если из-за недостаточности информации невозможно учесть все внешние воздействия на систему, то рассматривают задачу об устойчивости при постоянно действующих (сопровождающих) возмущениях.

Для устойчивости системы по Ляпунову достаточно наличие области начальных отклонений, сколь угодно малой, по отношению к которой невозмущенное движение устойчиво.

Если область начальных отклонений, по отношению к которой невозмущенное движение устойчиво, является конечной, то система устойчива (асимптотически устойчива) в большом.

Асимптотическая устойчивость в целом соответствует асимптотически устойчивому движению по отношению к любым начальным отклонениям.

Областью притяжения асимптотически устойчивого режима называют часть фазового пространства, удовлетворяющую следующему условию: любая начавшаяся в этой области фазовая траектория с течением времени приближается к невозмущенному режиму. Областью притяжения асимптотически устойчивого движения в целом является все фазовое пространство.

Нелинейные консервативные динамические системы обычно не бывают асимптотически устойчивыми. Любое сколь угодно малое

изменение начальных условий приводит к изменению параметров движения. Изображающая точка, соответствующая возмущенному движению, не может оставаться в сколь угодно малой окрестности изображающей точки невозмущенного движения. Однако фазовые траектории возмущенного и невозмущенного движений остаются близкими одна к другой. Для движений такого вида вводится понятие орбитальной устойчивости.

Невозмущенное движение называется орбитально устойчивым, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно найти такое положительное число $\delta(\varepsilon)$, при котором любая фазовая траектория, начинающаяся при $t = t_0$ в δ -окрестности фазовой траектории невозмущенного движения, не выходит из ε -окрестности этой траектории при любом $t > t_0$. Если, кроме того, фазовая траектория возмущенного движения при $t \rightarrow \infty$ асимптотически приближается к траектории невозмущенного движения, то такое движение называется асимптотически орбитально устойчивым.

Асимптотически орбитально устойчивые движения могут существовать лишь в неконсервативных нелинейных системах (например, в автоколебательных).

Определение устойчивости невозмущенного движения проводится либо с помощью функций Ляпунова [1.40], либо исследуется по первому приближению. Для построения функций Ляпунова в общем случае универсальный конструктивный алгоритм не найден, отыскание таких функций проводится индивидуально для каждого класса динамических систем. Исследование устойчивости по первому приближению основано на предположении, что свойства системы в отношении устойчивости ее невозмущенного движения обнаруживаются уже в тех малых возмущенных движениях, которые возникают около невозмущенного движения в течение малого отрезка времени после сообщения системе достаточно малого начального возмущения. Исходя из этого предположения при исследовании устойчивости в, вообще говоря, нелинейных уравнениях возмущенного движения отбрасываются все слагаемые выше первого порядка (уравнения линеаризуются). Исходя из линеаризованных уравнений делается заключение об устойчивости невозмущенного движения исходной системы. Естественно, в некоторых случаях такой подход неправилен. Построены примеры систем, у которых невозмущенное решение устойчиво по первому приближению и неустойчиво в смысле прямого метода Ляпунова [1.41]. Однако существуют условия, при выполнении которых можно пользоваться алгоритмом анализа устойчивости нелинейных систем по первому приближению. Эти условия дают теоремы Ляпунова.

При исследовании устойчивости по первому приближению правые части дифференциальных уравнений возмущенного движения разлагают в ряды по целым степеням $\delta\phi_i$:

$$\frac{d\delta\phi_i(t)}{dt} = p_{i1}\delta\phi_i + \dots + p_{in}\delta\phi_n + \Phi_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.4.3.6)$$

где Φ_i содержат $\delta\phi_i(t)$ в степени не ниже второй.

Уравнения первого приближения имеют вид

$$\frac{d\delta\phi_i(t)}{dt} = p_{i1}\delta\phi_i + \dots + p_{in}\delta\phi_n \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.4.3.7)$$

Если рассматриваются стационарные решения $x_i = \text{const}$ автономной системы, то коэффициенты p_{ik} постоянны и функции Φ_i не зависят явно от времени. Характеристическим уравнением системы (1.4.3.7) называется уравнение

$$|p_{ik} - \lambda\delta_{ik}| = 0 \quad (i, k = 1, \dots, n), \quad (1.4.3.8)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера ($\delta_{ik} = 1$, если $i = k$ и $\delta_{ik} = 0$, если $i \neq k$).

Теорема Ляпунова об устойчивости автономных систем по первому приближению формулируется следующим образом:

1) если вещественные части всех корней характеристического уравнения первого приближения отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от членов выше первого порядка малости Φ_i ;

2) если среди корней характеристического уравнения найдется по меньшей мере один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво независимо от членов выше первого порядка малости.

В критических случаях, когда вещественные части некоторых корней характеристического уравнения равны нулю, в то время как вещественные части остальных корней отрицательны, об устойчивости невозмущенного движения нельзя судить по уравнениям первого приближения — необходимо рассмотреть влияние нелинейных членов Φ_i .

Таким образом, для исследования устойчивости по первому приближению достаточно определять знаки вещественных частей корней характеристического уравнения. Это можно сделать, не вычисляя корней, с помощью *критерия Рауса—Гурвица*.

Для неавтономных систем (p_{ik} и Φ_i явно зависят от времени t) задача исследования устойчивости по первому приближению существенно усложняется. О свойствах решения системы дифференци-

альных уравнений возмущенного движения в этом случае судят по характеристичным числам.

Характеристичным числом функции $f(t)$ называют число, определяемое формулой

$$\chi\{f(t)\} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln|f(t)|}{t}. \quad (1.4.3.9)$$

Система дифференциальных уравнений (1.4.3.7) называется правильной, если для нее выполняется равенство $\chi_1 + \chi_2 = 0$, где

$$\chi_1 + \chi_2 - \text{характеристичные числа соответственно функций } e^{\int_{k=1}^n p_{kk} dt} \text{ и } e^{-\int_{k=1}^n p_{kk} dt}.$$

Теорема об устойчивости по первому приближению для неавтономных систем:

1) если система дифференциальных уравнений первого приближения правильная и все ее характеристичные числа положительны, то невозмущенное движение устойчиво;

2) если система дифференциальных уравнений первого приближения правильная и среди ее характеристичных чисел имеется хотя бы одно отрицательное, то невозмущенное движение неустойчиво.

При исследовании устойчивости периодических режимов движения правые части дифференциальных уравнений возмущенного движения оказываются также периодическими функциями времени t . При этом периодическими функциями времени являются и коэффициенты дифференциальных уравнений первого приближения

$$p_{ik}(t+T) = p_{ik}(t), \quad (1.4.3.10)$$

где T — период решения.

Вопрос об устойчивости периодических режимов движения можно исследовать с помощью приведенных теорем. Однако часто для этого используют другие соображения. Например, можно показать, что система уравнений (1.4.3.7) с периодическими коэффициентами обладает следующими свойствами: по теореме Флоке [1.40] для линейной системы (1.4.3.7) с T -периодическими коэффициентами нормирования при $t = 0$ фундаментальная матрица решений имеет вид [1.40]:

$$M(t) = \Phi(t)e^{\Lambda t}, \quad (1.4.3.11)$$

где $\Phi(t)$ — кусочно-гладкая T -периодическая матрица, причем $\Phi(0) = E$ (E — единичная матрица), и Λ — постоянная матрица.

λ_j — решения уравнения $\det(\Lambda - \lambda E) = 0$, т.е. собственные значения матрицы Λ , называют характеристическими показателями системы. Матрица, вычисленная в конце периода T , т.е. $M(T)$, называется матрицей монодромии, ее собственные значения ρ_j суть корни уравнения

$$|M(T) - \rho E| = 0, \quad (1.4.3.12)$$

где ρ_j называются мультипликаторами.

Кроме того, имеет место соотношение

$$\delta\phi_i(t + T) = \rho\phi_i(t). \quad (1.4.3.13)$$

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению периодических решений:

1) если все корни характеристического уравнения (1.4.3.12) (мультипликаторы) имеют модули меньше единицы, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически независимо от членов выше первого порядка Φ_r ;

2) если среди корней характеристического уравнения (1.4.3.12) (мультипликаторов) имеется хотя бы один, модуль которого больше единицы, то невозмущенное движение неустойчиво независимо от Φ_r .

Смысл этой теоремы очевиден из соотношения (1.4.3.13): при мультипликаторе с модулем меньше единицы возмущения убывают с течением времени, периодическое решение устойчиво. Если модуль мультипликатора больше единицы — возмущения нарастают, периодическое решение неустойчиво.

Построение характеристического уравнения (1.4.3.12) для периодических режимов представляет собой трудную задачу. Если для уравнений типа (1.4.3.7) с постоянными коэффициентами для составления характеристического уравнения не нужно знать частные решения, то для уравнений с периодическими коэффициентами это необходимо. Поэтому при построении характеристического уравнения (1.4.3.12) используют те или иные методы приближенного нахождения решений дифференциальных уравнений, образующих фундаментальную матрицу решений системы (1.4.3.7).

Устойчивость состояния равновесия. Теорема об устойчивости состояния равновесия консервативных систем уже упоминалась при рассмотрении простейшего примера. Для устойчивости изолированного положения равновесия консервативной системы с голономными и стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы потенциальная энергия системы в этом положении принимала минимальное значение.

Устойчивость вынужденных колебаний нелинейной системы. При гармоническом возбуждении нелинейной динамической системы в некотором диапазоне частот решение задачи о вынужденных колебаниях неоднозначно — одному и тому же значению частоты возбуждения соответствуют несколько решений с различными амплитудами, т.е. несколько разных режимов движения. Некоторые из этих режимов могут быть устойчивыми, а другие — неустойчивыми. При анализе устойчивости различных режимов коэффициенты уравнений первого приближения оказываются периодическими функциями времени. В этих случаях можно пользоваться методами анализа устойчивости периодических решений.

Устойчивость параметрических колебаний нелинейной системы. При гармоническом параметрическом возбуждении нелинейной системы наряду с тривиальным решением, соответствующим неподвижному состоянию системы, могут возникать и ограниченные периодические устойчивые и неустойчивые решения. Для анализа устойчивости и нулевых (константа, в том числе и тождественный нуль, является периодической функцией с любым периодом), и ограниченных периодических решений можно также пользоваться методами анализа устойчивости периодических решений. Заметим, что в линейной модели параметрических колебаний решение может быть либо нулевым, либо неограниченно возрастающим.

Устойчивость динамических процессов, соответствующих колебаниям смешанного характера, когда в динамической системе могут возникать автоколебания, присутствовать внешние воздействия, соответствующие вынужденным и параметрическим колебаниям, может также исследоваться с помощью методов анализа устойчивости периодических решений. Подчеркнем, что речь идет именно о периодических решениях. В случае наличия колебаний на фоне монотонного тренда можно в модели выделить тренд и рассматривать периодический процесс относительно этого тренда. Методика выделения тренда обсуждалась ранее.

1.4.4. СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

Нелинейные динамические системы имеют ряд принципиальных особенностей. С одной стороны, учет нелинейности значительно усложняет модель и методы исследования. С другой стороны, и это главное, учет нелинейности позволяет значительно приблизить модель к моделируемому процессу или явлению и избежать принципиальных несоответствий и ограниченности области применения, присущих линейным моделям.

Перечислим наиболее существенные особенности нелинейных динамических систем:

- в нелинейных системах принцип суперпозиции не выполняется (в этом главное отличие свойств нелинейных систем от свойств линейных). Например, результат (отклик) одновременного действия двух внешних воздействий не равен сумме результатов (откликов), вызываемых порознь каждым из этих воздействий. Изменение масштаба воздействия не приводит к пропорциональному изменению масштаба отклика;
- возможность существования нескольких положений равновесия;
- неизохронность собственных колебаний, т.е. зависимость частоты таких колебаний от амплитуды;
- возможность существования нескольких устойчивых и неустойчивых динамических режимов при одних и тех же параметрах системы и (или) внешнего воздействия;
- возникновение супер- и субгармонических колебаний;
- возможность существования устойчивых автоколебаний с ограниченной амплитудой;
- возможность мягкого и жесткого самовозбуждения автоколебаний;
- проявление эффектов захватывания;
- проявление эффектов синхронизации;
- взаимодействие различных видов колебаний в нелинейных системах;
- взаимодействие динамических процессов, относящихся к различным подсистемам динамической системы с несколькими степенями свободы;
- бифуркации решений при изменении параметра системы и (или) внешнего воздействия;
- зарождение новых решений или переход от неустойчивых состояний к устойчивым, потеря устойчивости при изменении параметров системы и (или) внешнего воздействия;
- возможность реализации катастроф — скачкообразных изменений при плавном изменении условий.
- существование в нелинейных моделях как относительно простых решений, свойственных линейным моделям, так и сложнейших устойчивых и неустойчивых решений;
- возможность существования хаотических решений в детерминированных моделях;
- возможность существования странного аттрактора;
- самоорганизация в динамических системах.

Рассмотрим подробнее некоторые из этих особенностей.

1. *Принцип суперпозиции* — важнейшее свойство линейных систем. Однако линейность окружающего нас мира имеет место в очень ограниченном диапазоне изменения параметров. Переходя к нелинейным моделям, мы отказываемся от этого принципа. Вместо того мы приобретаем множество новых возможностей моделирования, позволяющих значительно приблизить модель к реальности.

2. *Возможность существования нескольких положений равновесия* иллюстрируется примерами, приведенными в табл. 1.4.2.2.

3. *Неизохронность собственных колебаний*, т.е. зависимость частоты таких колебаний от амплитуды. Напомним, что собственными колебаниями называются колебания в консервативной системе, происходящие в результате начального отклонения. В линейных моделях частота свободных колебаний определяется параметрами системы, но не зависит от начальных условий; амплитуда колебаний определяется начальными условиями. В нелинейных системах существует зависимость частоты собственных колебаний от амплитуды. Это является следствием того, что в нелинейных моделях реакция системы нелинейно зависит от отклонения от положения равновесия.

4. *Возможность существования нескольких устойчивых и неустойчивых динамических режимов при одних и тех же параметрах системы и (или) внешнего воздействия*. Для линейных систем дифференциальных уравнений известны теоремы существования и единственности решения. Для нелинейных моделей известны многочисленные конструктивные примеры отыскания различных устойчивых и неустойчивых режимов при одних и тех же параметрах системы и (или) внешнего воздействия. Классическим примером является модель Дюффинга (1.2.8.3), соответствующая вынужденным колебаниям в системе с кубической нелинейностью. Этот эффект обнаруживается даже в квазилинейной постановке, когда нелинейные слагаемые считаются малыми по сравнению с линейными.

5. *Возникновение супер- и субгармонических колебаний*. При влиянии на нелинейную систему гармонического внешнего воздействия в ней возможно возникновение периодических режимов, частоты которых в целое число раз больше или меньше частоты внешнего воздействия. В модели Дюффинга (1.2.8.3) этот эффект проявляется в квазилинейной постановке, в существенно нелинейной постановке обнаружены весьма сложные субультрагармонические колебания [1.20].

6. *Возможность существования устойчивых автоколебаний с ограниченной амплитудой*. В линейных моделях амплитуда колебаний неограниченно возрастает, поэтому эти модели используются для определения устойчивости положения равновесия. В нелинейных моделях кроме устойчивости можно определить и амплитуду автоколебаний.

7. *Возможность мягкого и жесткого самовозбуждения автоколебаний.* Если состояние равновесия неустойчиво и соответствующая этому состоянию равновесия особая точка окружена устойчивым предельным циклом, то произойдет мягкое возбуждение автоколебаний. Всегда присутствующие сколь угодно малые отклонения от неустойчивого состояния равновесия приведут к нарастающим колебаниям, которые будут приближаться к устойчивому предельному циклу. Примеры таких систем приведены в табл. 1.4.2.2.

Если состояние равновесия устойчиво и соответствующая этому состоянию равновесия особая точка окружена неустойчивым предельным циклом, который, в свою очередь, окружен устойчивым предельным циклом, то для возбуждения автоколебаний с конечной ненулевой амплитудой, соответствующих устойчивому предельному циклу, необходимо достаточно большое внешнее воздействие, способное «перебросить» систему через неустойчивый предельный цикл. Такое возбуждение колебаний называется жестким. Если достаточное для возбуждения автоколебаний с конечной амплитудой внешнее воздействие не проявится, то система будет неограниченно долго находиться в устойчивом состоянии равновесия, которому соответствует тривиальное (равное тождественно нулю) решение системы. Пример системы, в которой возможно жесткое возбуждение автоколебаний, имеется в табл. 1.4.2.2.

8. *Эффект захватывания* проявляется следующим образом. В динамической системе существует устойчивый режим автоколебаний с определенной частотой. Если на эту систему действует внешнее возбуждение с частотой, близкой к частоте автоколебаний, то в системе может установиться периодический режим с частотой внешнего возбуждения. Это явление называется захватыванием динамической системы с автоколебаниями. Еще более сложным может быть процесс взаимного влияния автоколебаний и колебаний, обусловленных внешними воздействиями. При этом возможно как усиление результирующих колебаний, так и взаимное гашение колебаний.

9. *Эффект синхронизации динамических систем* — глобальное свойство таких систем разного масштаба — от простейших механических до социально-экономических. При моделировании этот эффект обнаруживается при нелинейной постановке задачи. Рассматривается несколько динамических систем (не менее двух). При отсутствии взаимодействия эти системы ведут себя независимо, их динамические свойства проявляются индивидуально. При наличии даже весьма слабых связей между динамическими системами движение этих систем становится взаимосвязанным, согласованным. Устанавливается единая (или соизмеримая) частота колебаний. Выделяются два варианта: а) определенные частотные соотношения устанавливаются в результате взаимодействия объектов, рассматриваемых

как равноправные; б) один из объектов считается настолько мощным, что он навязывает свой ритм движения (этот ритм считается заранее заданным и неизменным) другим автоколебательным объектам. Последнее иногда называется внешней синхронизацией.

По-видимому, первое наблюдение этого эффекта было сделано в XVII в. Гюйгенсом, который обнаружил, что двое маятниковых часов, подвешенные к легкой балке, начинали ходить точно в такт. В XIX в. Рэлей обнаружил, что две органнйе трубы с малой отстройкой и с расположенными рядом отверстиями звучат в унисон, причем иногда трубы могут заставить почти полностью замолчать одна другую, т.е. происходит взаимная синхронизация двух автоколебательных систем при установлении противофазных или близких к ним колебаний. В начале XX в. эффект синхронизации был открыт в электрических цепях и в некоторых электромеханических устройствах.

Тенденцией вращающихся твердых тел к взаимной синхронизации могут быть объяснены целочисленные соотношения, наблюдающиеся между угловыми скоростями вращений и обращений небесных тел. Классическим примером такой закономерности является движение Луны, которая всегда обращена к Земле одной стороной. Эффекты синхронизации и захватывания наблюдаются и в поведении биологических объектов и сообществ. По-видимому, проявлением эффекта синхронизации является так называемый эффект толпы, когда сообщество людей под действием объединяющего фактора (связь) ведет себя не так, как ведут себя отдельные, не связанные фактором и ситуацией люди в тех же условиях.

«Бурные, продолжительные аплодисменты, переходящие в овацию» — этой процедурой заканчивалась речь лидеров нашей страны в эпоху развитого социализма. Овацией, по-видимому, назывались синхронные хлопки в ладони. Из хаоса отдельных хлопков в ладони зарождалось синхронизированное упорядоченное периодическое движение — овация. Кремлевский Дворец съездов, где, как правило, происходило действие, вмещает несколько тысяч человек. Большинство из присутствующих в консерваториях не обучались, и тем не менее, овация всегда случалась. Не получалась, а именно случалась. Возможно, аплодисменты начинали специально назначенные люди. Но синхронные хлопки в ладони среди той публики организовать искусственно невозможно — стабильно проявлялся эффект самосинхронизации аплодисментов нескольких тысяч человек. Все желающие могут посмотреть запись этого натурального эксперимента по синхронизации биологических объектов в кадрах кинохроники середины — конца XX в. В этом примере есть сдерживающий фактор — все присутствующие достаточно дисциплинированы. Аналог этого в простых моделях — диссипативные воздействия, в результате действия которых затухают случайные отклонения. А в альтернативном

натурном эксперименте — поведении зрителей, например, рок-концертов нет этого сдерживающего диссипативного фактора — внутренней дисциплины. В результате поведение зрителей, хотя и объединенных общей связью и общим ритмом музыки, является хаотичным, и из этого хаоса не зарождается глобальное упорядоченное синхронизированное периодическое движение — все самовыражаются относительно независимо. Впрочем, быть может, и на музыкальных концертах присутствуют элементы локальной синхронизации — музыка является значительным фактором связи.

Одним из интересных проявлений эффекта синхронизации в социально-экономических системах является феномен моды, рассматриваемой как синхронизированное отношение потребителей к товару или услуге. В современных условиях связующим элементом для образования «модной» синхронизации является реклама и (или) средства массовой информации (СМИ). Однако мода зародилась гораздо раньше, чем СМИ. Из этого можно заключить, что возникновение моды в социально-экономической среде возможно при достаточно низком уровне связей между элементами среды. В современных условиях эффект моды является мощным экономическим фактором для отраслей экономики, производящих модный товар или услугу. И эти отрасли вкладывают часть прибыли в установление связей, формирующих «модную» синхронизацию, — оплачивают прямую и косвенную рекламу, более тонкие средства формирования позитивного отношения потребителей к своему товару (услуге). Параллельно в обществе существует синхронизация на гораздо более низком, никем не спонсируемом уровне связей — массовые увлечения на некоммерческой основе.

В экономике к эффекту синхронизации можно отнести глобальность экономических кризисов, явление взаимосвязи хозяйственных механизмов различных экономических объектов и государств, влияние лидирующего сектора экономики на взаимосвязанные отрасли, влияние сильной валюты на связанные с ней более слабые валютные системы. Связи являются естественным свойством нормально функционирующей экономической системы, поэтому и синхронизация экономических систем — нормальное и часто наблюдаемое явление. Искусственный разрыв экономических связей исключает из факторов экономического развития мощный ускоритель, основанный на эффекте синхронизации.

Синхронизация представляет собой весьма общую закономерность поведения взаимно связанных материальных объектов самой различной природы. Понимание этого факта способствовало развитию общей теории синхронизации динамических систем. Синхронизацию можно рассматривать как одно из проявлений тенденции материальных форм к самоорганизации, т.е. к упорядоченности. Эта

тенденция противоположна тенденции к «перемещиванию», т.е. к беспорядку, также характерной для материальных форм и нашедшей обобщенное отражение во втором начале термодинамики [1.42]. Важной и еще не решенной задачей является изучение общих условий, при которых та или другая из этих полярных тенденций является преобладающей.

10. *Взаимодействие различных видов колебаний в нелинейных системах.* В связи с отсутствием в нелинейных системах принципа суперпозиции взаимодействие различных видов колебаний в таких системах принимает достаточно сложные формы. Автоколебания, вынужденные, параметрические колебания — каждое из них в отдельности может порождать несколько устойчивых и неустойчивых предельных циклов, могут возникать сложные полигармонические колебания различных периодов. Их сложное нелинейное взаимодействие может стать источником различных эффектов — усиления или снижения результирующего движения, взаимного влияния различных типов колебаний.

В качестве примера рассмотрим взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний в нелинейной системе с одной степенью свободы. Пусть движение системы описывается уравнением

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 (1 + P \sin(\omega t)) x(t) + b \frac{dx(t)}{dt} + \gamma x^3(t) = W \sin(\omega t). \quad (1.4.4.1)$$

Заметим, что частоты и фазы внешнего и параметрического воздействий выбраны одинаковыми. Это соответствует ситуации, когда внешнее и параметрическое воздействия взаимосвязаны.

Рассмотрим некоторые результаты численного исследования этой системы в окрестности зоны главного параметрического резонанса $\omega = 2\omega_0$. Приводимые далее результаты получены при следующих значениях коэффициентов рассматриваемого уравнения: $\omega_0 = 1$; $P = W = 0.4$; $b = 0.03$; $\gamma = 1$. Частота внешнего возмущения ω варьировалась в пределах $1,8 < \omega < 2,3$. При $\omega = 1,8$ динамический процесс в системе качественно близок к вынужденным колебаниям: период решения совпадает с периодом возмущения, фазовый портрет решения представляет собой замкнутую кривую типа эллипса. С ростом частоты ω характер решения качественно меняется, решения, близкие к вынужденным колебаниям, становятся неустойчивыми; и при $\omega = 2,3$ устойчивые колебания в системе близки к параметрическим: период решения вдвое больше периода внешних возмущений, фазовый портрет решения подобен эллипсу. При $1,8 < \omega < 2,3$ колебания имеют достаточно сложный характер. Проследим эволюцию процесса от колебаний, близких к вынужденным при $\omega = 1,8$, к колебаниям, имеющим характер параметрических при $\omega = 2,3$, с помощью анали-

за фазовых портретов и графиков решений рассматриваемого уравнения при различных значениях частоты ω . На рис. 1.4.4.1 представлена серия кривых, отражающая эволюцию решений, полученных при изменении частоты $1,9 \leq \omega \leq 2,3$. Все упомянутые выше решения устойчивы. Кроме того, в исследованном диапазоне частот обнаружены неустойчивые режимы, соответствующие вынужденным колебаниям. Таким образом, при воздействии на нелинейную динамическую систему возмущений качественно различного типа, возбуждающих вынужденные и параметрические колебания, колебательный процесс в системе может носить как достаточно сложный характер, обусловленный взаимодействием двух различных факторов, так и соответствовать одному из двух типов внешних воздействий.

Серия графиков при изменении частоты внешних периодических воздействий ω , позволяющая построить одну из ветвей амплитудно-частотной характеристики, приведена на рис. 1.4.4.2. При построении решений использованы следующие базовые значения параметров уравнения (1.4.4.1): $\omega_0 = 1$; $P = 0,4$; $W = 1$; $b = 0,1$; $\gamma = 0,352$. На

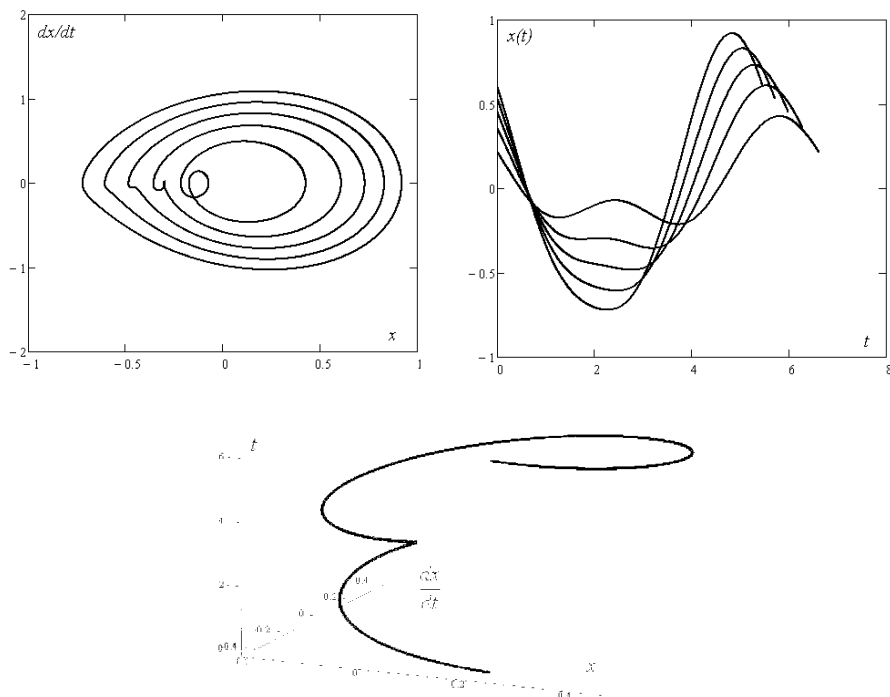


Рис. 1.4.4.1. Устойчивые $2T$ -периодические решения уравнения (1.4.4.1) при $\omega_0 = 1$; $P = 0,4$; $W = 0,03$; $\gamma = 1$; $\omega = 1,9$; $2,0$; $2,1$; $2,2$; $2,3$. В трехмерном пространстве $(x, dx/dt, t)$ приведен один период решения при $\omega = 1,9$

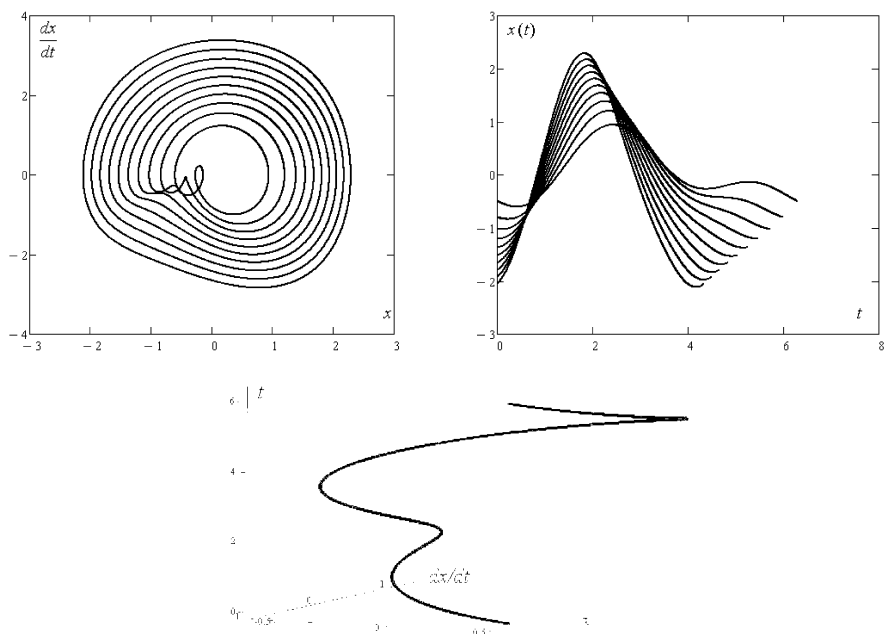


Рис. 1.4.4.2. Устойчивые $2T$ -периодические решения уравнения (1.4.4.1) при $\omega_0 = 1$; $P = 0,4$; $W = 1$; $b = 0,1$; $\gamma = 0,352$; $\omega = 2,0, 2,1, \dots, 2,9$. В трехмерном пространстве $(x, dx/dt, t)$ приведен один период решения при $\omega = 2,0$

графиках видно, как по мере изменения частоты меняются не только частота и амплитуда, но и качественный вид решения.

Парадоксальный, на первый взгляд, эффект снижения амплитуды результирующих колебаний при росте амплитуды внешнего воздействия W , соответствующего возбуждению вынужденных колебаний, иллюстрируется рис. 1.4.4.3. Здесь кривая с большей амплитудой соответствует системе с меньшим значением параметра W . Заметим, что оба этих решения устойчивы, параметр $P = 0,4$ далек от критического значения $P = 1$.

При дальнейшем росте параметра W этот эффект сохраняется. Одновременно при тех же значениях параметров существует другое устойчивое решение с большей амплитудой (рис. 1.4.4.4).

Обнаруженные эффекты уменьшения амплитуды колебаний с ростом амплитуды одного из двух видов внешнего воздействия (вызывающего либо вынужденные, либо параметрические колебания) можно объяснить взаимодействием в рассматриваемой системе двух различных динамических процессов, соответствующих вынужденным и параметрическим колебаниям. Отметим, что в линейных задачах подобный эффект может проявляться только в системах, число степеней свободы которых не менее двух.

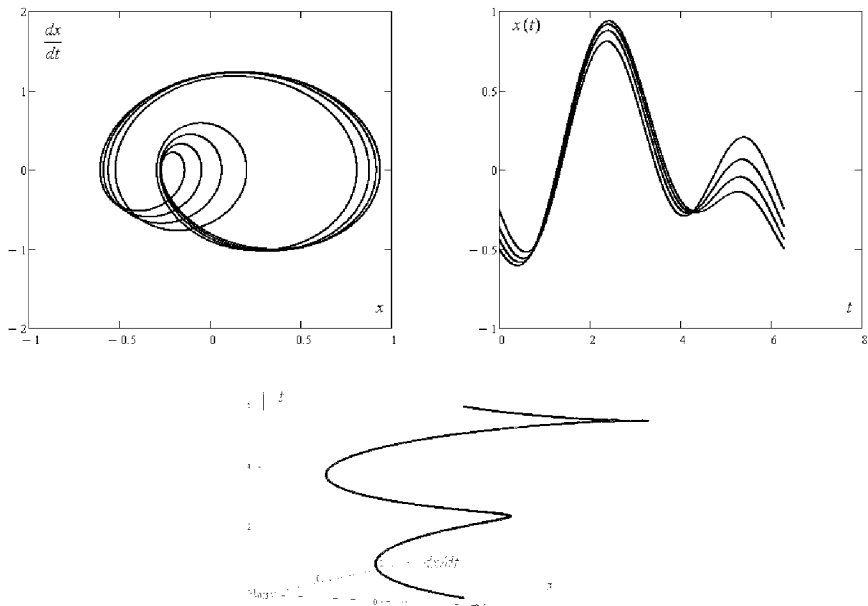


Рис. 1.4.4.3. Устойчивые $2T$ -периодические решения уравнения (1.4.4.1) при $\omega_0 = 1$; $P = 0,4$; $\omega = 2,0$; $b = 0,1$; $\gamma = 0,352$; $W = 1,0; 1,1; 1,2; 1,3$. В трехмерном пространстве $(x, dx/dt, t)$ приведен один период решения при $W = 1,3$

Не менее интересные эффекты проявляются при воздействии на автоколебательную систему внешних воздействий, соответствующих вынужденным колебаниям. Для определенности рассмотрим модель вида

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + x - 0,2 \frac{dx(t)}{dt} + \left[\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right]^3 + 30x^3 = W \sin 3t \quad (1.4.4.2)$$

и проследим эволюцию ее периодических решений при изменении параметра W .

На рис. 1.4.4.5 приведены результаты численного решения задачи Коши для автоколебательной системы без внешних воздействий ($W = 0$). Видно, что решение достаточно быстро приходит к предельному циклу.

При достаточно больших значениях параметра $W \gg 1$ колебания имеют характер вынужденных. По мере уменьшения параметра W это решение теряет устойчивость вблизи значения $W = 0,9$ (рис. 1.4.4.6).

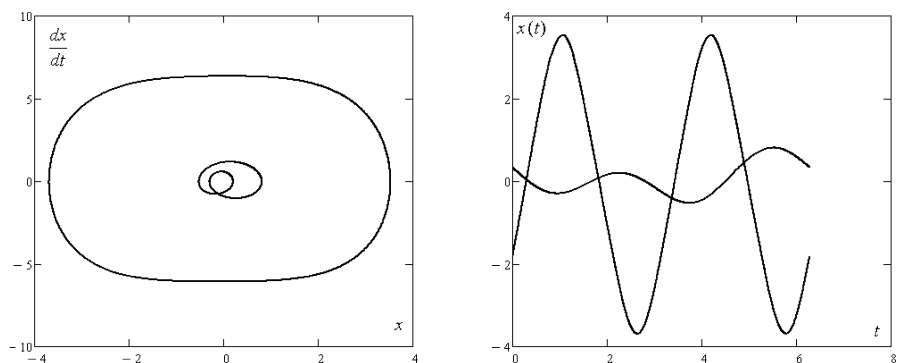


Рис. 1.4.4.4. Различные устойчивые $2T$ -периодические решения уравнения (1.4.4.1) при $\omega_0 = 1$; $P = 0,4$; $\omega = 2,0$; $b = 0,1$; $\gamma = 0,352$; $W = 1,3$

При тех же значениях параметров обнаружены другие $2T$ -периодические решения, фазовые портреты которых имеют более сложный характер. Эти решения являются устойчивыми и при $W = 0,9$ (рис. 1.4.4.7).

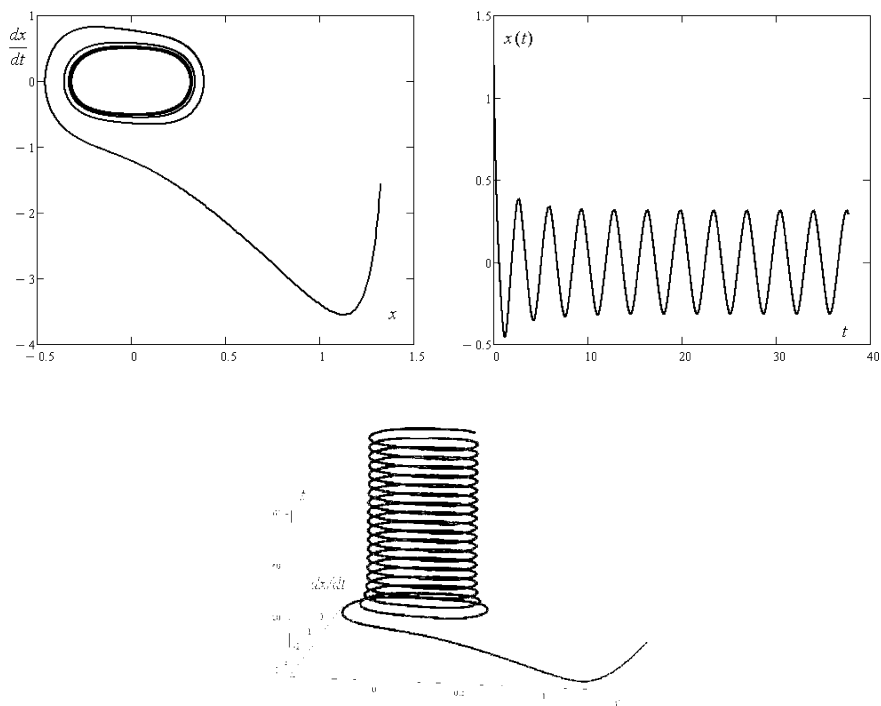


Рис. 1.4.4.5. Переходный процесс в модели (1.4.4.2) при $W = 0$

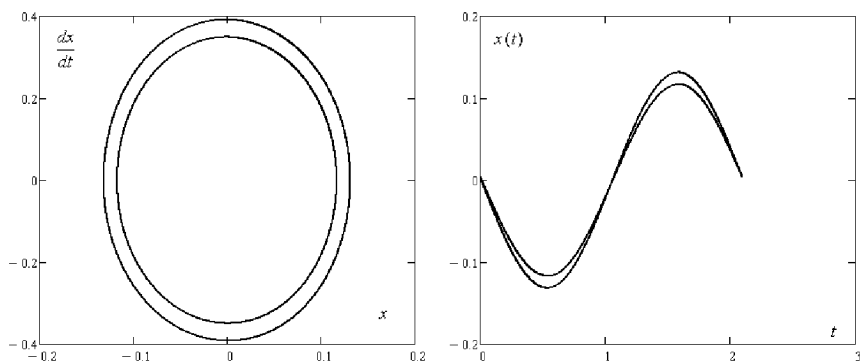


Рис. 1.4.4.6. Колебания, близкие к вынужденным, в модели (1.4.4.2). Устойчивые при $W = 1$, неустойчивые при $W = 0,9$

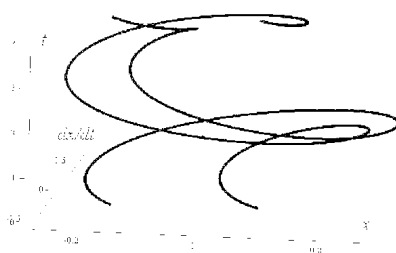
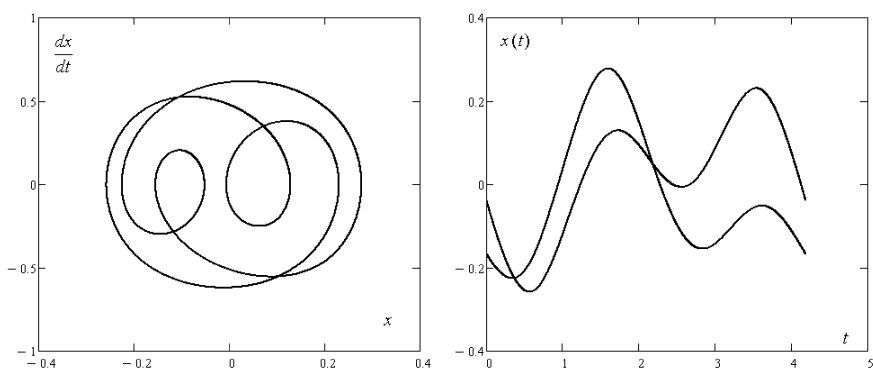


Рис. 1.4.4.7. $2T$ -периодические устойчивые решения в модели (1.4.4.2). $W = 0,9$; $W = 1,0$

Таким образом, при значении параметра $W = 1$ в исследуемой системе обнаружены два принципиально различных устойчивых решения. Этот факт является характерным для вынужденных колеба-

ний нелинейных систем. Кроме того, на рис. 1.4.4.7 отмечается наличие симметричных решений.

Представляет интерес эволюция обнаруженного устойчиво $2T$ -периодического решения при уменьшении параметра W , соответствующего снижению влияния внешнего воздействия на автоколебательную систему. Эта эволюция представлена на рис. 1.4.4.8 — 1.4.4.10.

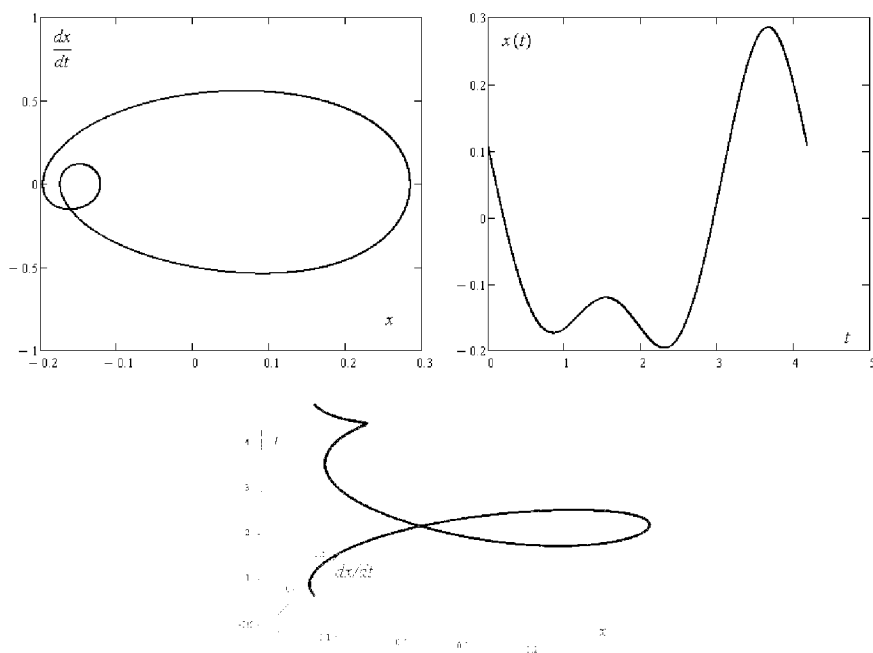


Рис. 1.4.4.8. $2T$ -периодические устойчивые решения в модели (1.4.4.2) при $W = 0,7$

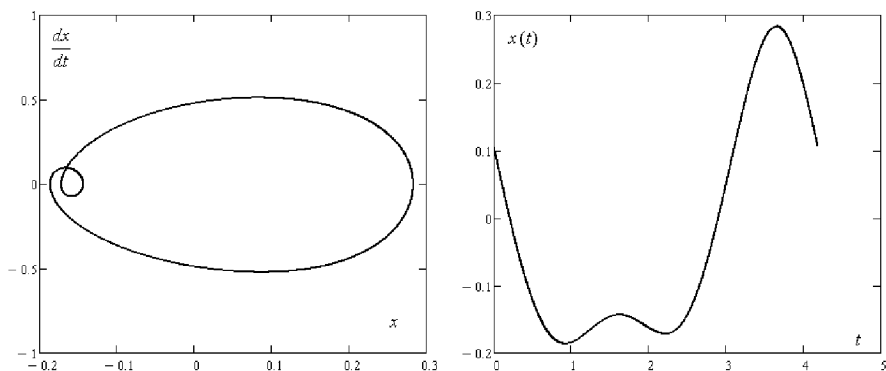


Рис. 1.4.4.9. $2T$ -периодические устойчивые решения в модели (1.4.4.2) при $W = 0,6$

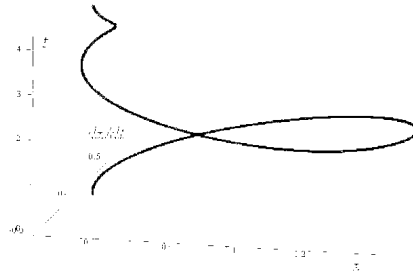


Рис. 1.4.4.9. (окончание)

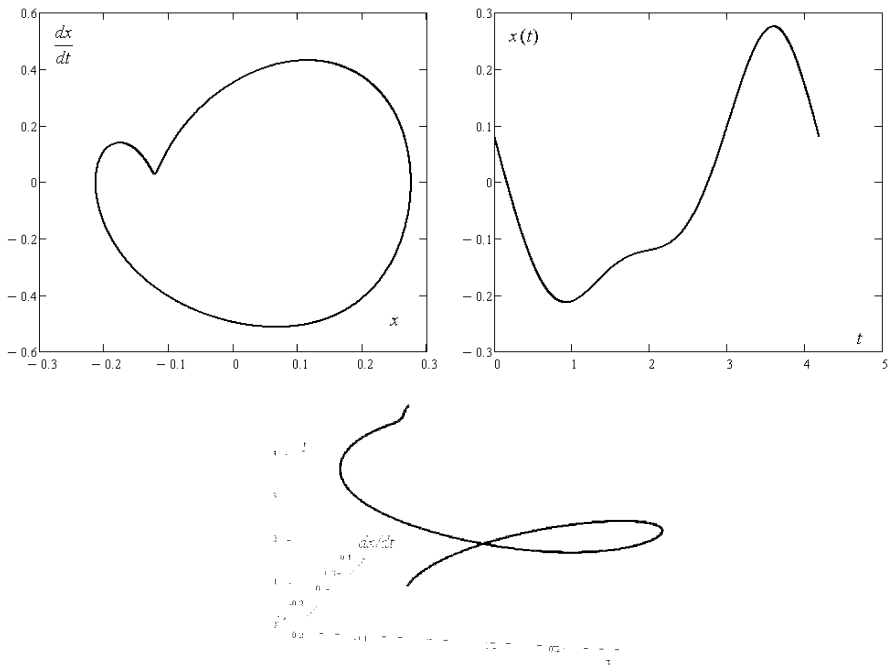


Рис. 1.4.4.10. $2T$ -периодические устойчивые решения в модели (1.4.4.2) при $W = 0,5$

В этом же диапазоне значений параметров обнаруживаются и неустойчивые решения. Пример такого решения приведен на рис. 1.4.4.11.

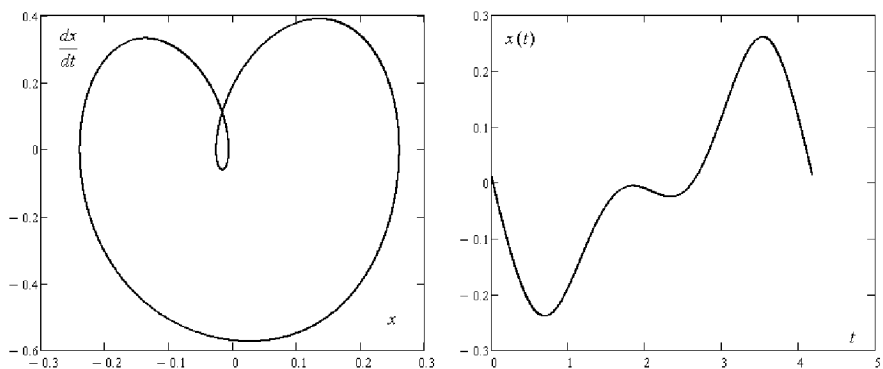


Рис. 1.4.4.11. $2T$ -периодические неустойчивые решения в модели (1.4.4.2) при $W = 0,7$

При дальнейшем снижении значения параметра W решение имеет сложный характер. На рис. 1.4.4.12 представлены результаты численного интегрирования на временном промежутке, соответствующем нескольким периодам.

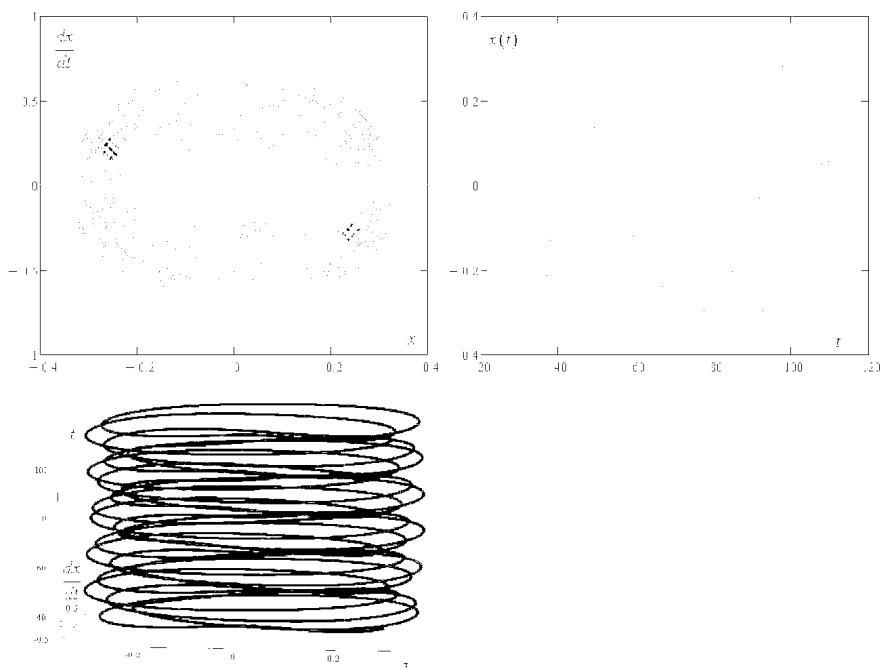


Рис. 1.4.4.12. Результаты численного интегрирования уравнения (1.4.4.2) при $W = 0,4$

11. *Взаимодействие динамических процессов, относящихся к различным подсистемам динамической системы с несколькими степенями свободы.*

По аналогии с физическими моделями степенями свободы будем называть независимые переменные, характеризующие состояния системы. В динамической системе с несколькими подсистемами, соответствующими отдельным степеням свободы, возможно взаимное влияние динамических режимов, относящихся к различным подсистемам. Этот эффект проявляется даже в линейных моделях. Рассмотрим линейную систему с двумя степенями свободы, модель движения которой соответствует системе уравнений вида

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + c_1 x_1(t) - c_2 [x_2(t) - x_1(t)] = Q \sin(\omega t) \\ m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + c_2 [x_2(t) - x_1(t)] = 0. \end{cases} \quad (1.4.4.3)$$

Рассматриваемая динамическая система состоит из двух связанных подсистем с параметрами (m_1, c_1) и (m_2, c_2) . Влияние внешнего гармонического воздействия $Q \sin \omega t$ относится только к движению, соответствующему подсистеме с параметрами (m_1, c_1) . Система двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка (1.4.4.3) известна как модель динамического гасителя колебаний [1.41]. Для такой системы можно найти аналитическое решение.

Будем искать решение в виде

$$x_1(t) = A \sin(\omega t), \quad x_2(t) = D \sin(\omega t). \quad (1.4.4.4)$$

A и D имеют смысл амплитуды колебаний каждой из подсистем, образующих динамическую систему с двумя степенями свободы, ω — частота колебаний, определяемая внешним воздействием $Q \sin \omega t$.

Подставляя (1.4.4.4) в (1.4.4.3), получим:

$$\begin{cases} m_1 (-\omega^2 A \sin(\omega t) + c_1 A \sin(\omega t) - c_2 [D \sin(\omega t) - A \sin(\omega t)]) = Q \sin(\omega t) \\ m_2 (-\omega^2 D \sin(\omega t)) + c_2 [D \sin(\omega t) - A \sin(\omega t)] = 0. \end{cases} \quad (1.4.4.5)$$

Эти соотношения должны выполняться в любой момент времени t , поэтому мы приравняем коэффициенты при $\sin(\omega t)$. В результате получаем систему двух линейных алгебраических уравнений относительно констант A и D :

$$\begin{cases} A(-\omega^2 m_1 + c_1 - c_2) + D(c_2) = Q \\ A(-c_2) + D(-\omega^2 m_2 + c_2) = 0. \end{cases} \quad (1.4.4.6)$$

Решая эту систему, получим:

$$\begin{aligned} A &= Q(c_2 - \omega^2 m_2)/\Delta, \\ D &= Qc_2/\Delta, \end{aligned} \quad (1.4.4.7)$$

где $\Delta = (c_1 - c_2 - \omega^2 m_1)(c_2 - \omega^2 m_2) + c_2^2$.

Анализируя полученное решение, видим, что $A = 0$ при $c_2 - \omega^2 m_2 = 0$. Таким образом, при соответствующей настройке второй подсистемы с параметрами (m_2, c_2) происходит гашение колебаний, вызванных внешним воздействием $Q \sin(\omega t)$, которое влияет на первую подсистему с параметрами (m_1, c_1) . Этот результат известен как эффект динамического гашения колебаний.

С более общей точки зрения в этой простейшей модели проявляется эффект взаимного влияния различных режимов колебаний, относящихся к движениям отдельных подсистем, образующих динамическую систему.

Аналогичным образом можно получить аналитическое решение для линейной динамической системы с учетом сопротивления, пропорционального скорости изменения основных переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$. В этом случае динамическая модель соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + c_1 x_1(t) - c_2 [x_2(t) - x_1(t)] + b_1 \frac{dx_1(t)}{dt} - \\ - b_2 \left[\frac{dx_2(t)}{dt} - \frac{dx_1(t)}{dt} \right] = Q \sin(\omega t) \\ m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + c_2 [x_2(t) - x_1(t)] + b_2 \left[\frac{dx_2(t)}{dt} - \frac{dx_1(t)}{dt} \right] = 0. \end{cases} \quad (1.4.4.8)$$

Решение этой системы ищем в виде

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t), \\ x_2(t) &= D \sin(\omega t) + E \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (1.4.4.9)$$

Подставляя (1.4.4.9) в (1.4.4.8), требуем выполнения получающихся соотношений в любой момент времени. Поэтому в каждом уравнении приравняем коэффициенты при функциях времени $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$. В результате получаем линейную неоднородную систему четырех алгебраических уравнений относительно констант A , B , D , E . В матричном виде эта система выглядит следующим образом.

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + c_1 + c_2 & -\omega(b_1 + b_2) & -c_2 & -\omega b_2 \\ \omega(b_1 + b_2) & -\omega^2 m_1 + c_1 + c_2 & -\omega b_2 & -c_2 \\ c_2 & \omega b_2 & -\omega^2 m_2 + c_2 & -\omega b_2 \\ -\omega b_2 & -c_2 & \omega b_2 & -\omega^2 m_2 + c_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ D \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4.4.10)$$

Для этой системы можно получить аналитическое решение, которое мы опускаем из-за громоздкости записи. Отметим, что трудоемкость исследования системы вида (1.4.4.10) значительно снижается при использовании распространенных математических пакетов. В рассматриваемой модели также проявляются эффекты взаимного влияния динамических процессов, проходящих в отдельных подсистемах, формирующих общую динамическую систему.

В нелинейных динамических системах подобные эффекты также имеют место, взаимодействие различных динамических режимов происходит в различных формах. Особый интерес представляет взаимное влияние различных подсистем с учетом возможности реализации разнообразных, в том числе сложных, динамических режимов, бифуркаций, динамического хаоса. Исследование подобных взаимодействий может проводиться численно. Рассмотрим, например, существенно нелинейную динамическую систему с N степенями свободы. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{d^2 x_j(t)}{dt^2} + j^2(k^2 j^2 + D_1)x_j(t) + x_j(t) \frac{j^2}{4} \left(\sum_{m=1}^N m^2 x_m^2(t) \right) + \delta_j \frac{dx_j(t)}{dt} = Q_j(t),$$

$$j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.4.4.11)$$

Учитывая возможное появление сложных решений, при численном исследовании ограничимся рассмотрением варианта с двумя степенями свободы ($N = 2$). Кроме того, для более четкого выделения эффекта взаимного влияния колебаний в отдельных подсистемах предположим, что внешнее воздействие $Q_j(t)$ влияет только на первую подсистему и имеет гармонический вид, т.е. $Q_1(t) = Q \sin(\omega t)$, $Q_2(t) = 0$.

При некоторых значениях параметров колебания возникают только в первой подсистеме, т.е. в той, к которой приложено внешнее воздействие $Q_1(t) = Q \sin(\omega t)$. Вторая подсистема находится в состоянии покоя.

Однако существует диапазон значений параметров, при которых колебания возникают в обеих подсистемах. Такие колебания могут иметь различную сложность — от простых гармонических колебаний до хаотических движений. В качестве примера на рис. 1.4.4.13 приводится одно из устойчивых $2T$ -периодических решений системы (1.4.4.11), представленное в различных двух- и трехмерных подпространствах пространства решений $\{t, x_1(t), dx_1(t)/dt, x_2(t), dx_2(t)/dt\}$. Это решение получено при следующих значениях параметров системы: $k^2 = 0,001$; $D_1 = -0,011$; $\delta_1 = \delta_2 = 0,04$; $Q = 1$, $\omega = 0,6$. Отметим, что для обеих подсистем при таких значениях параметров коэффициенты при $x_1(t)$, $x_2(t)$ отрицательны, особая точка $(0, 0)$ имеет седловой характер.

В другом случае, когда эти коэффициенты положительны, особая точка $(0, 0)$ имеет характер устойчивого фокуса. В этом случае в процесс колебаний вовлекаются обе подсистемы в случае сильной нелинейности.

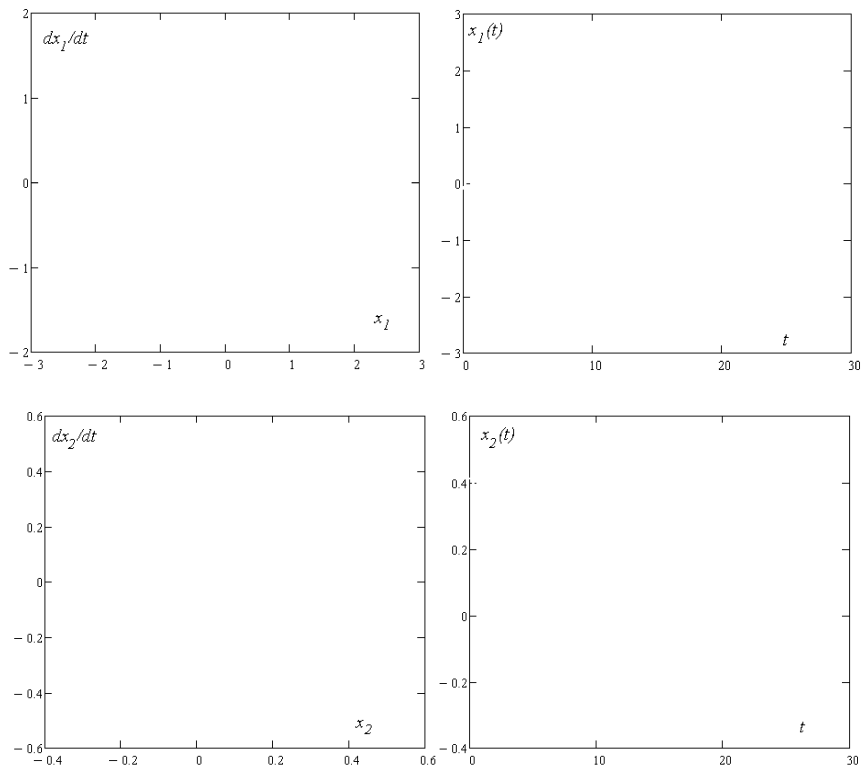


Рис. 1.4.4.13. Одно из устойчивых $2T$ -периодических решений системы (1.4.4.11), представленное в различных двух- и трехмерных подпространствах пространства решений $\{t, x_1(t), dx_1(t)/dt, x_2(t), dx_2(t)/dt\}$ при $k^2 = 0,001$, $D_1 = -0,011$, $\delta_1 = \delta_2 = 0,04$, $Q = 1$, $\omega = 0,6$

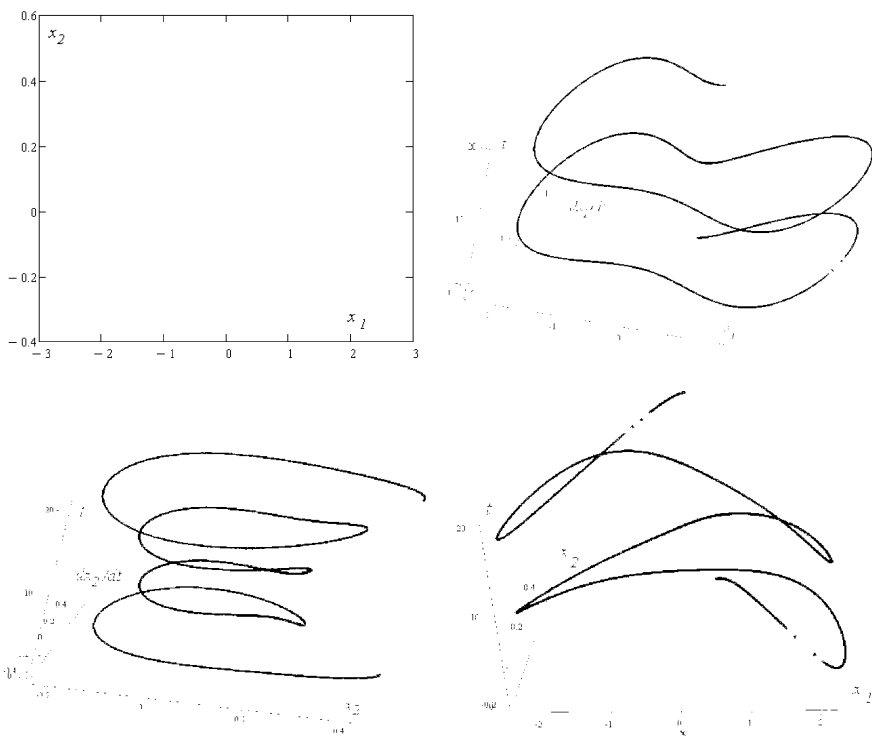


Рис. 1.4.4.13. (окончание)

На рис. 1.4.4.14 приводится одно из устойчивых $3T$ -периодических решений системы (1.4.4.11), полученное при следующих значениях параметров системы: $k^2 = 0,5$; $D_1 = 0,5$; $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$; $Q = 100$; $\omega = 1$.

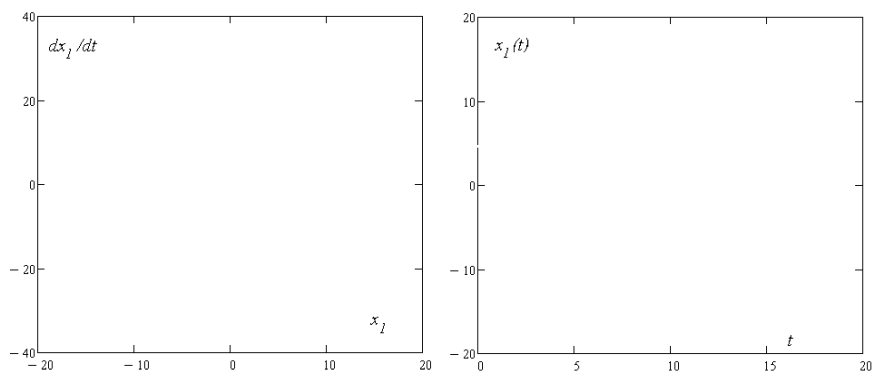


Рис. 1.4.4.14. Устойчивое $3T$ -периодическое решение системы (1.4.4.11) при $k^2 = 0,5$; $D_1 = 0,5$; $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$; $Q = 100$; $\omega = 1$

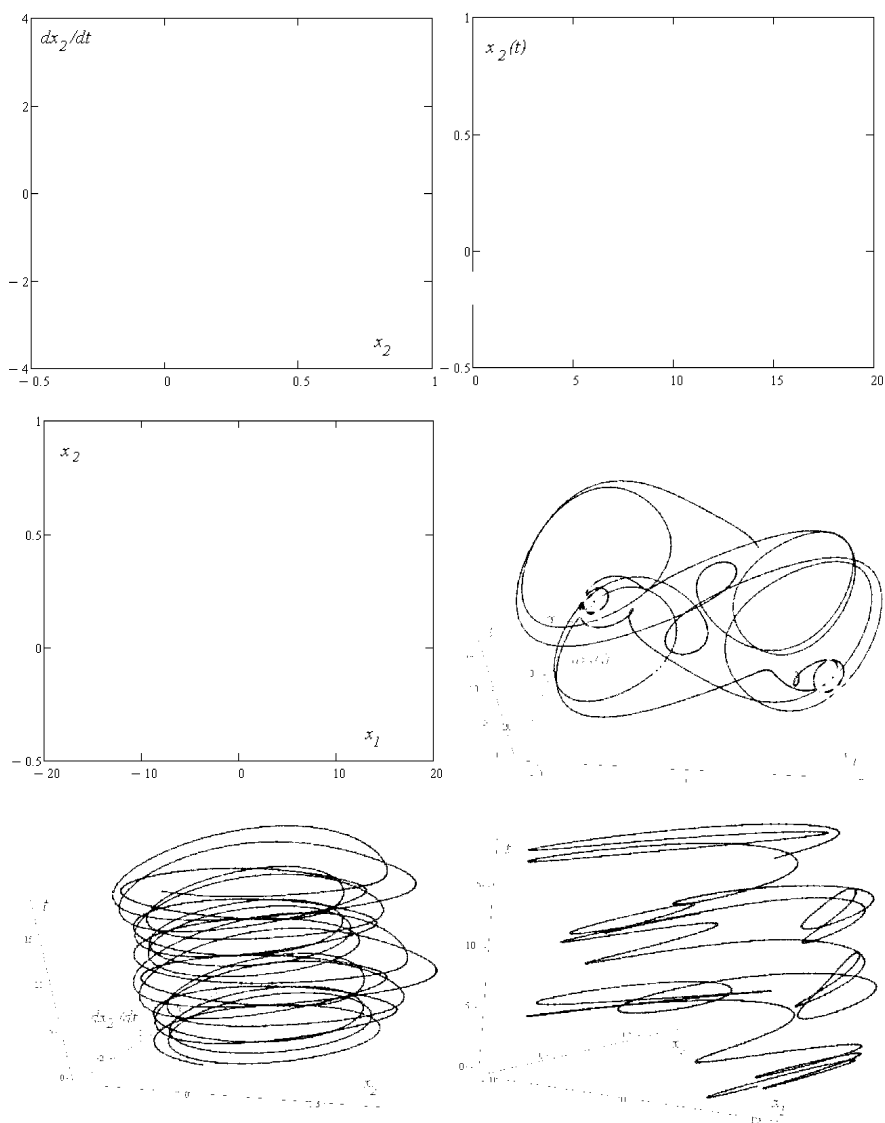


Рис. 1.4.4.14. (окончание)

12. *Бифуркации решений при изменении параметра системы и (или) внешнего воздействия.* Термин «бифуркация» означает раздвоение и применяется в достаточно широком смысле применительно к качественным перестройкам типов процессов при изменении (как правило, плавном) параметров, от которых зависит процесс. При непрерывном изменении одного из параметров системы или внешнего воздействия (такой параметр иногда называется определяющим) мо-

жет произойти изменение типа особых точек, возникновение или исчезновение предельных циклов; значения параметра, при которых это происходит, называют бифуркационными. Иногда при постепенном переходе значения определяющего параметра через бифуркационное значение амплитуда возникающего предельного цикла непрерывно возрастает от нуля — происходит мягкое возникновение предельного цикла, при этом устойчивая особая точка становится неустойчивой. В других случаях при бифуркационном значении параметра сразу возникает предельный цикл с конечной амплитудой — жесткое возникновение предельного цикла. При некоторых значениях определяющего параметра могут существовать несколько предельных циклов — неустойчивые и устойчивые. При определенном бифуркационном значении определяющего параметра неустойчивый предельный цикл может стягиваться в особую точку, которая становится неустойчивой. При непрерывном изменении определяющего параметра может происходить смена устойчивого стационарного режима, когда система из состояния равновесия переходит в установившийся режим, соответствующий движению по устойчивому предельному циклу.

13. *Зарождение новых решений или переход от неустойчивых состояний к устойчивым, потеря устойчивости при изменении параметров системы и (или) внешнего воздействия. Этот процесс непосредственно связан с бифуркациями (см. п. 11).*

14. *Проявления катастроф [1.38, 4.43] — скачкообразных изменений при плавном изменении условий.* В отличие от бифуркации, катастрофами называют скачкообразные изменения, возникающие как реакция системы на плавное изменение параметров или внешних условий. Теория катастроф дает универсальный аппарат исследования скачкообразных переходов, резких качественных изменений. Известны применения методов теории катастроф к задачам сердечных сокращений, различных разделов физики, эмбриологии, лингвистики, психологии, моделирования деятельности мозга и психических расстройств. Эти же методы использованы в некоторых моделях экономики, поведения биржевых игроков. Источниками теории катастроф являются теория бифуркаций динамических систем и теория особенностей гладких отображений Уитни.

15. *Существование в нелинейных моделях как относительно простых решений, свойственных линейным моделям, так и сложнейших устойчивых и неустойчивых решений.* Нелинейные модели, как правило, содержат и линейную составляющую. С одной стороны, это влияние традиций, ведь моделирование динамических систем началось с линейных моделей. Вначале нелинейные модели развивались как обобщение линейных моделей. В такой форме нелинейного моделирования для перехода к линейному моделированию доста-

точно было просто положить равными нулю коэффициенты при нелинейных компонентах модели. В дальнейшем, когда в нелинейные модели стали включаться зависимости, определяемые непосредственно по результатам объективного обследования исходного объекта, а не с субъективной формулировкой типа «рост параметра 1 считаем пропорциональным параметру 2», линейные свойства модели стали в ней учитываться в той мере, в какой они присутствуют в исходном объекте. Таким образом, в нелинейных моделях присутствуют и методы, и результаты, представляемые линейным приближением, и гораздо более широкие возможности.

16. *Возможность существования хаотических решений в детерминированных моделях.* В течение долгого времени развития динамического моделирования существовал вопрос: можно ли строго получить статистическое описание из динамического? До недавнего времени ответ был отрицательным. Возникновение стохастических эффектов в детерминированной динамической системе, находящейся под влиянием детерминированных воздействий, связывалось исключительно с ее сложностью — чрезвычайно большим числом степеней свободы (например, газ в сосуде), когда детерминированное описание просто теряет смысл, хотя в принципе и возможно. При этом переход к вероятностному описанию основывался на какой-либо гипотезе (например, эргодической). Появившиеся результаты позволяют утверждать, что нелинейные динамические системы могут иметь стохастические решения, т.е. статистический подход здесь не приближенный метод описания, а единственно верное отражение реального поведения динамической системы. Поразительны недавние математические открытия в отношении очень простых нелинейных систем невысокого порядка, решения которых проявляют стохастические свойства, например шарик в бильярде с вогнутыми стенками, вынужденные колебания стержня с прощелкиванием. Интуитивно от детерминированных систем ожидается детерминированное поведение решения. Как возникает случайность в детерминированной системе? Короткий ответ — в результате неустойчивости индивидуальных движений, происходящих внутри ограниченного фазового пространства. Неустойчивость отдельных решений порождает хаос. Эта неустойчивость всех отдельных конечных движений определяет сложность и разнообразие решений. Отсюда естественным образом появляется понятие совокупности и основывающееся на нем статистическое описание. Существуют подтверждаемые экспериментами теории перехода от детерминированного поведения к стохастическому для самых разнообразных динамических систем (гидродинамических течений, радиотехнических генераторов случайных сигналов, автокаталитических химических реакций и др.). Одно из направлений экономической динамики также включает по-

добный аппарат моделирования. Может показаться естественным, что если уж поведение относительно простой нелинейной системы может быть сложным, то система с большим или бесконечным числом степеней свободы тем более должна демонстрировать случайное поведение. Однако в общем случае это не выполняется.

17. *Возможность существования странного аттрактора.* Рассмотренные выше примеры поведения траекторий на фазовой плоскости иллюстрируют типичные ситуации: состояния равновесия, периодические движения и сепаратрисы. Этот набор полностью исчерпывает возможные ситуации на фазовой плоскости. Этим примерам соответствуют три различных типа решений уравнений. Отметим, что в реальных системах решения, соответствующие сепаратрисам, не реализуются из-за неустойчивости. Движения диссипативных систем разделяются на два вида: переходные процессы и установившиеся режимы, которым соответствуют замкнутые траектории. Аттрактором называют притягивающие предельные множества.

Важным результатом исследований последних лет явилось обнаружение принципиально новых видов движений в динамических системах. Таким движениям в фазовом пространстве с размерностью три и более соответствуют сложным образом устроенные притягивающие множества, траектории изображающих точек которых не принадлежат ни к одному из упомянутых выше типов аттракторов. Фазовые траектории представляются здесь в виде бесконечной, нигде не пересекающейся линии, причем при $t \rightarrow \infty$ траектория не покидает замкнутой области и не притягивается к известным типам аттракторов. Такие траектории называют устойчивыми по Пуассону. Эти траектории возвращаются со временем в малую окрестность начальной точки. Именно с существованием таких траекторий связывают возможность стохастического поведения детерминированных динамических систем с размерностью фазового пространства ≥ 3 .

Этот эффект впервые обнаружил Э. Лоренц в 1963 г. при численном исследовании динамики трехмерной модели тепловой конвекции [1.44]. Впоследствии притягивающая область в фазовом пространстве динамической системы, характеризующаяся режимом установившихся непериодических колебаний, была названа странным аттрактором. Этот термин утвердился для обозначения нерегулярных колебаний детерминированных динамических систем.

Движения динамических систем далеко не всегда соответствуют странному аттрактору. Для некоторых нелинейных динамических систем размерности ≥ 3 можно найти значения параметров, при которых реализуется странный аттрактор.

Аттракторы в виде положений равновесия, предельных циклов называют простыми, или регулярными. Этим названием подчеркивается, что движения на них соответствуют классическим понятиям

об устойчивом по Ляпунову детерминированном поведении динамической системы. Странный аттрактор соответствует сложному нерегулярному (в смысле отсутствия периодичности) динамическому режиму, который во многом сходен с представлениям о стационарных случайных процессах.

Следует пояснить терминологическую особенность. Термин «случайный» здесь имеет вполне определенный смысл. Случайное движение либо непредсказуемо, либо предсказуемо с определенной вероятностью. Траектории «истинного» случайного движения однозначно не повторяются ни в численном, ни в натурном эксперименте. В случае странного аттрактора имеется строгая предсказуемость в смысле детерминированности модели. Решение задачи Коши, как и для регулярных аттракторов, подчиняется теореме единственности и однозначно повторяется при фиксированных начальных условиях. Поэтому для обозначения сложных колебаний, соответствующих странному аттрактору, используются термины «детерминированная стохастичность», «детерминированный хаос». Эти процессы отличаются от стохастических в классическом смысле, которые при описании требуют учета флуктуации в исходных динамических уравнениях либо непосредственно подчиняются уравнениям для плотности распределения вероятностей статистической теории.

Принципиальное различие регулярных и странных аттракторов динамических систем состоит в следующем. Регулярные аттракторы характеризуются асимптотической устойчивостью и по Ляпунову, и по Пуассону. Для странных аттракторов устойчивость по Пуассону всегда сопровождается неустойчивостью по Ляпунову. Как следствие, это ведет к экспоненциальной расходимости близких траекторий и чувствительности к малым изменениям начальных данных.

Приведем пример простой системы, в которой был обнаружен странный аттрактор. *P.J. Holmes* [1.21] исследовал нелинейное уравнение Дюффинга с отрицательной жесткостью вида

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 10x + \frac{dx}{dt} + 100x^3 = W \cos 3,76t \quad (1.4.4.12)$$

и обнаружил в нем странный аттрактор в диапазоне изменения параметра $1 < W < 2$. Эта модель автором рассматривалась применительно к поперечным колебаниям потерявшего устойчивость стержня. Но уравнение Дюффинга имеет гораздо более широкие приложения. Это уравнение соответствует вынужденным колебаниям шарика с учетом сопротивления в профиле (рис. 1.4.4.15), определя-

емом кривой $\Pi(x) = \int_0^x (-10x + 100x^3) dx = -5x^2 + 25x^4$ (константа интегрирования принята нулевой).

Это же уравнение соответствует обобщенной модели экономической динамики (1.2.8.1). Фазовый портрет и потенциальные соотношения для этой модели имеют вид, представленный на рис. 1.4.4.15. Имеются две особые точки типа «центр» и одно седло. В системе возможны следующие состояния: вынужденные колебания около центра 1 (устойчивые или неустойчивые — траектория 1); вынужденные колебания около центра 2 (устойчивые или неустойчивые — траектория 2); вынужденные колебания, охватывающие оба центра (устойчивые или неустойчивые — траектория 3); положение равновесия, соответствующее седловой точке (всегда неустойчивое). Положения равновесия, соответствующие особым точкам типа «центр», неустойчивы в силу наличия внешнего воздействия. Странный аттрактор в этой системе реализуется при тех значениях параметра W , при которых все перечисленные режимы, которые могут быть устойчивыми, становятся неустойчивыми. Система «уходит» с каждого из неустойчивых режимов. Так как нет ни одного устойчивого состояния, решение вечно будет «блуждать» между всеми неустойчивыми состояниями. Уйти из зоны притяжения этой области не позволяют потенциальные барьеры по краям.

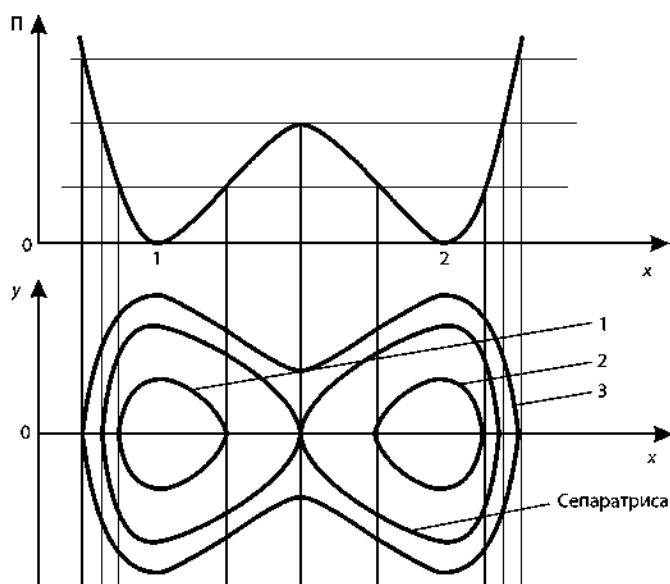


Рис. 1.4.4.15. Фазовые траектории для нелинейного уравнения Дюффинга

Учитывая этот пример, странным аттрактором будем считать устойчивое многообразие неустойчивых траекторий.

На границе области существования странного аттрактора и внутри нее могут проявляться другие эффекты, связанные с существенно нелинейным характером системы.

Первый из них — бифуркации удвоения периода по Фейгенбауму [1.45]. Этот эффект проявляется следующим образом. Начинаем отслеживать поведение системы с тех значений параметров, когда существует хотя бы одно устойчивое T -периодическое решение. При изменении для определенности одного из параметров системы (назовем его p) в сторону существования странного аттрактора при определенном значении этого параметра $p = p_1$ происходит потеря устойчивости периодического решения, и при этом значении параметра появляется новое устойчивое $2T$ -периодическое решение с периодом, вдвое большим периода первоначального решения. При дальнейшем изменении параметра p при значении $p = p_2$ происходит потеря устойчивости $2T$ -периодического решения и зарождается $4T$ -периодическое устойчивое решение. Дальнейшее изменение параметра p приводит к появлению $8T$, $16T$, $32T$...-устойчивых периодических решений при значениях параметра p , соответствующих точкам бифуркации, вплоть до перехода в режим странного аттрактора. Важнейшей особенностью перехода к хаосу путем бесконечной серии бифуркаций удвоения периода является универсальность [1.45]. Выяснилось, что интервал параметра p , внутри которого существует устойчивый цикл периода 2^n , с ростом n убывает по закону геометрической прогрессии

$$\frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n+1} - p_n} = \delta = 4,66920... \quad (1.4.4.13)$$

Постоянная δ называется универсальной постоянной Фейгенбаума.

Учитывая свойства геометрической прогрессии, можно определить значение параметра p , соответствующее циклу бесконечного периода, вместе с которым появляется стохастическое поведение. Для этого надо определить несколько значений параметра p , соответствующих первым бифуркациям удвоения периода. После этого, используя формулу суммы сходящейся геометрической прогрессии со знаменателем $1/\delta$, можно найти границу области странного аттрактора.

Приводимые ниже графики иллюстрируют серию бифуркаций удвоения периода в модели вынужденных нелинейных колебаний (1.4.4.12) при изменении параметра $0,8 < W < 1$. На этой границе зоны странного аттрактора переход от упорядоченного периодичес-

кого движения к детерминированному хаосу проходит именно по сценарию бифуркаций удвоения периода. В зоне устойчивых решений при $W < 0,8$ имеются два симметричных решения, соответствующих колебаниям около двух центров (рис. 1.4.4.16). С ростом параметра W такие решения теряют устойчивость (при $W \approx 0,854$) и появляются устойчивые $2T$ -периодические решения (рис. 1.4.4.17). Здесь и далее приводится одно из двух симметричных решений. С дальнейшим ростом параметра W при $W \approx 0,92$ происходит следующая бифуркация и появляется устойчивое $4T$ -периодическое решение (рис. 1.4.4.18). Следующие бифуркации происходят при $W \approx 0,9341$, $W \approx 0,9371$, $W \approx 0,9384$, появляются устойчивые решения с периодом $8T$ (рис. 1.4.4.19), $16T$ (рис. 1.4.4.20), $32T$ соответственно.

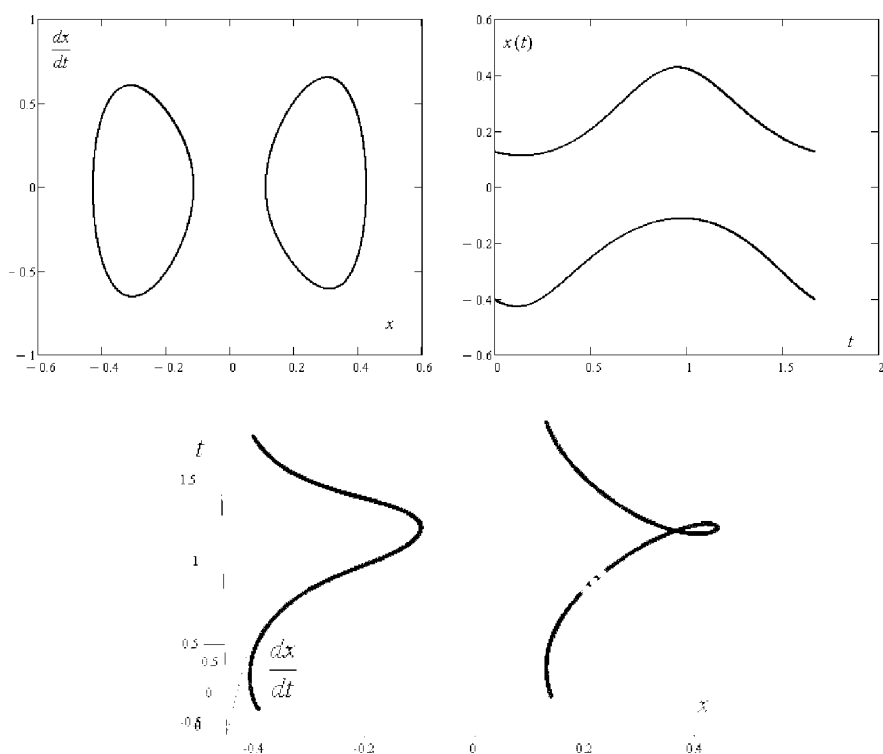


Рис. 1.4.4.16. Фазовые траектории и один период T -периодического устойчивого решения уравнения (1.4.4.12) при $W = 0,7$

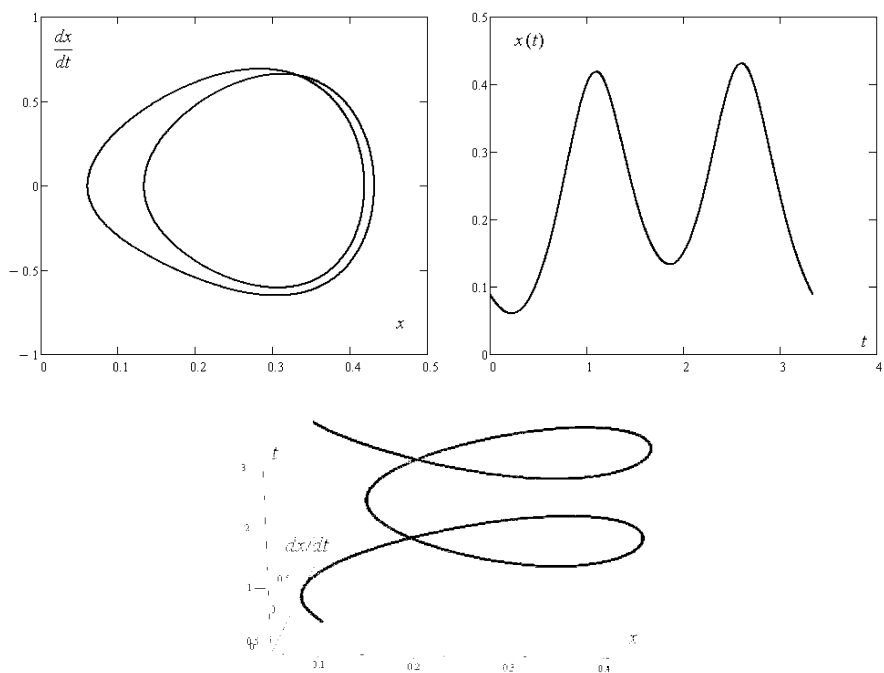


Рис. 1.4.4.17. Фазовые траектории и один период $2T$ -периодического устойчивого решения уравнения (1.4.4.12) при $W = 0,886$

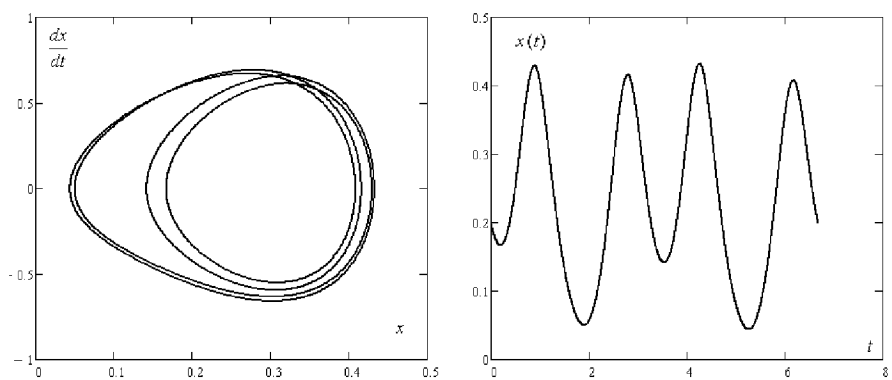


Рис. 1.4.4.18. Фазовые траектории и один период $4T$ -периодического устойчивого решения уравнения (1.4.4.12) при $W = 0,926$

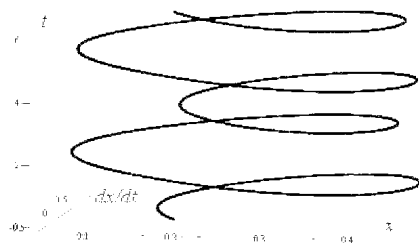


Рис. 1.4.4.18. (окончание)

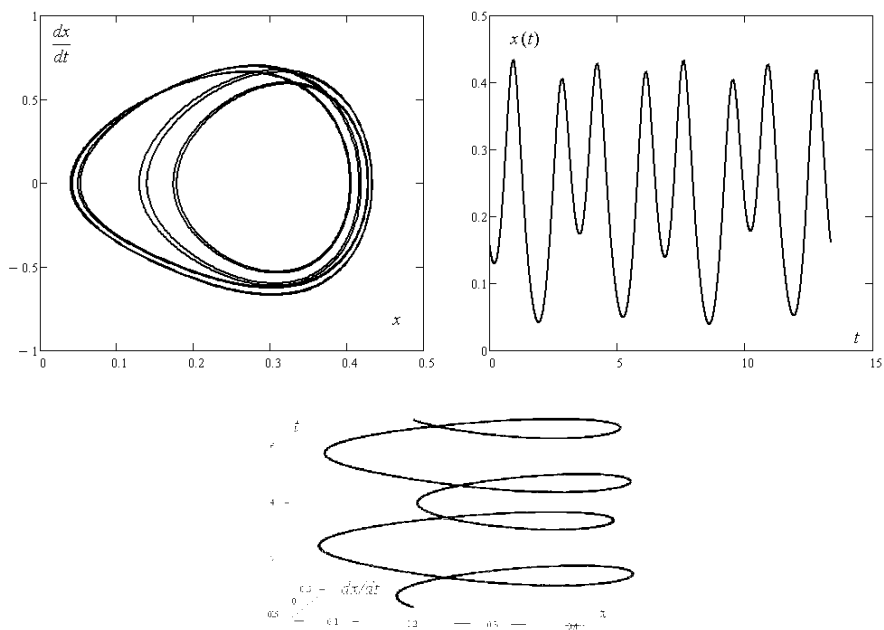


Рис. 1.4.4.19. Фазовые траектории и один период $8T$ -периодического устойчивого решения уравнения (1.4.4.12) при $W = 0,936$

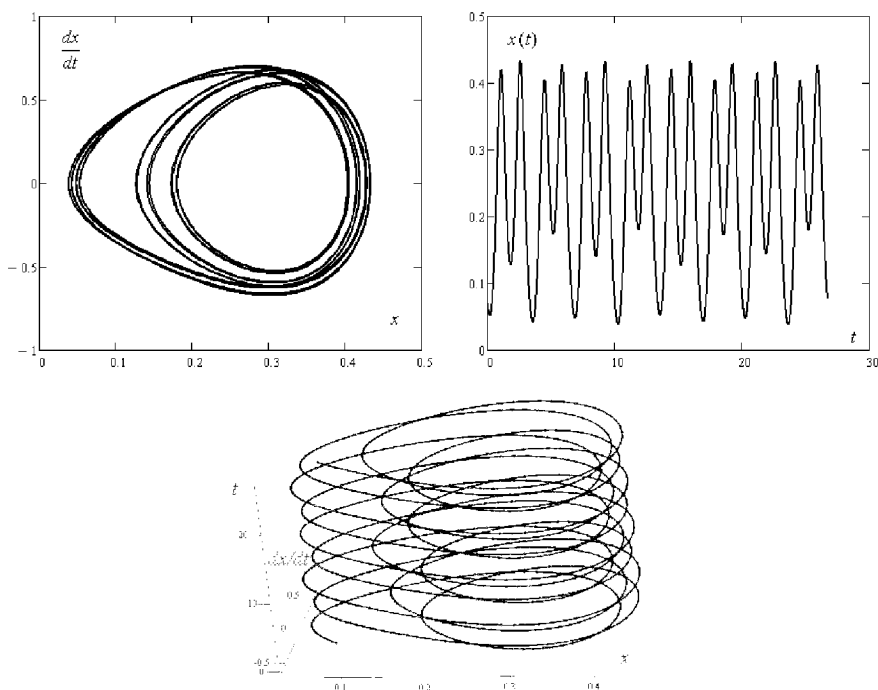


Рис. 1.4.4.20. Фазовые траектории и один период 167-периодического устойчивого решения уравнения (1.4.4.12) при $W = 0,9379$

Обнаружено еще одно удивительное явление в поведении рассматриваемой существенно нелинейной системы. В области детерминированного хаоса в диапазоне значений параметра $1,13 < W < 1,2$ найдено устойчивое периодическое решение с периодом, в 5 раз большим периода внешнего воздействия. Заметим, что это решение «окружено» областью странного аттрактора при изменении параметра W .

Рисунки 1.4.4.21–1.4.4.22 содержат расширение результата Холмса [1.21], относящегося к устойчивому периодическому решению кратности 5, и дополнение его серией кривых, показывающих эволюцию этого решения при изменении параметра W .

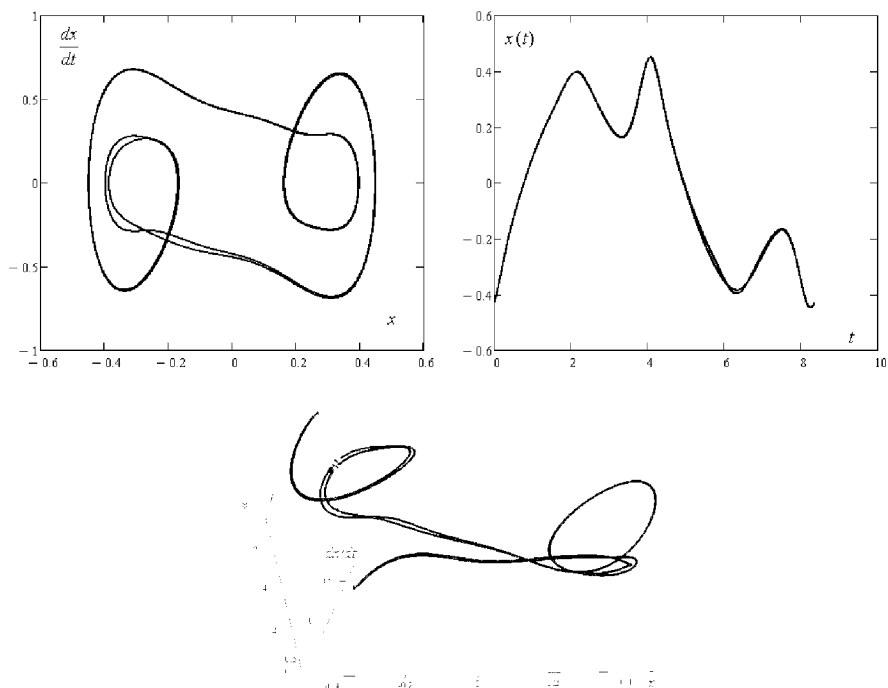


Рис. 1.4.4.21. Фазовые траектории и один период $5T$ -периодических устойчивого (при $W = 1,13$) и неустойчивого (при $W = 1,12$) решений уравнения (1.4.4.12)

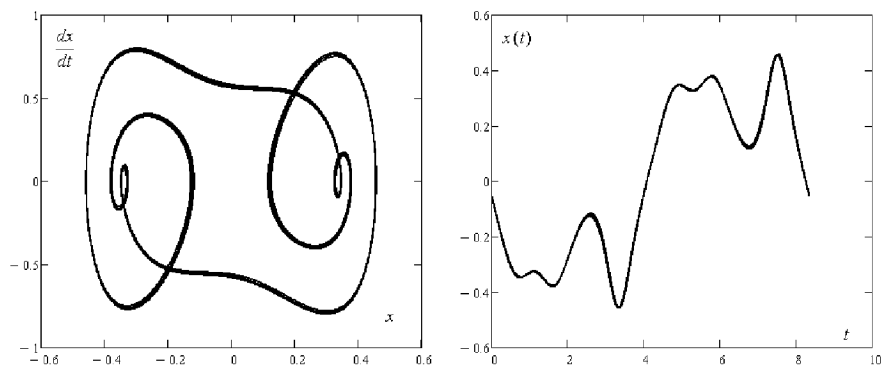


Рис. 1.4.4.22. Фазовые траектории и один период $5T$ -периодических устойчивых (при $W = 1,19$, при $W = 1,20$) и неустойчивого (при $W = 1,21$) решения уравнения (1.4.4.12). В трехмерном пространстве $(x, dx/dt, t)$ приведен один период устойчивого решения при $W = 1,2$

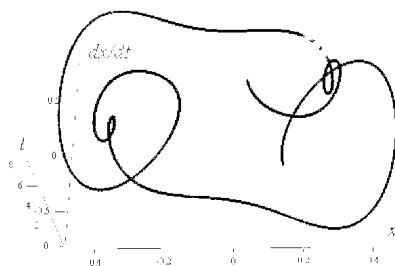


Рис. 1.4.4.22. (окончание)

Кроме этих устойчивых решений, в зоне странного аттрактора при $1,678 < W < 1,719$ обнаружены два различных устойчивых 3T-периодических решения. Эволюция одного из этих решений, устойчивого в диапазоне $1,6 < W < 1,704$ при изменении параметра W показана на рис. 1.4.4.23, второго, устойчивого в диапазоне $1,689 < W < 1,719$ — на рис. 1.4.4.24. Отметим значительное отличие характера движений, соответствующих этим решениям. Кроме того, отметим, что при $1,689 < W < 1,704$ устойчивы оба этих решения.

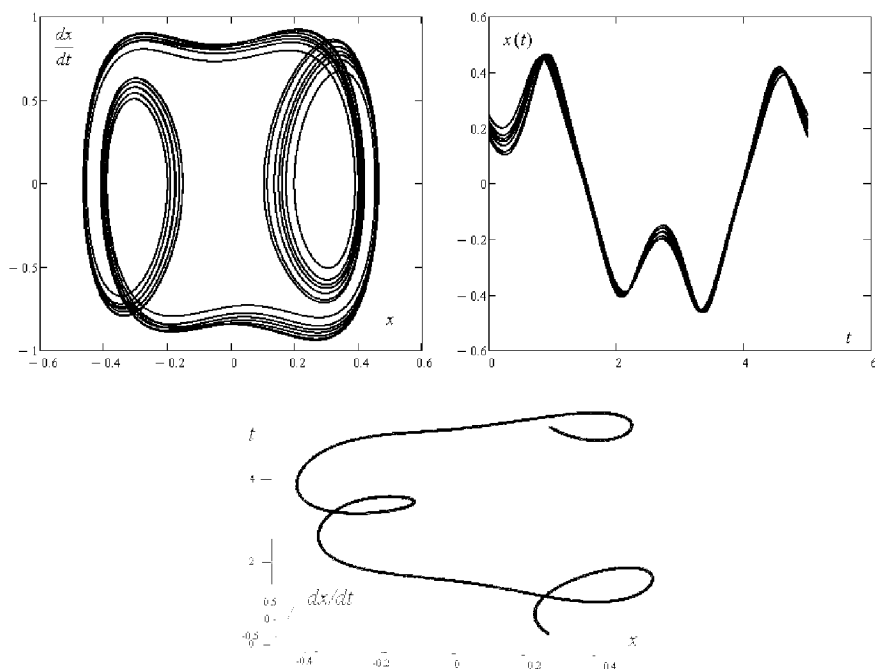


Рис. 1.4.4.23. Фазовые траектории и один период 3T-периодических устойчивых решений уравнения (1.4.4.12) при $W = 1,60; 1,62; 1,64; 1,66; 1,68; 1,7$. В трехмерном пространстве $(x, dx/dt, t)$ приведен один период устойчивого решения при $W = 1,64$

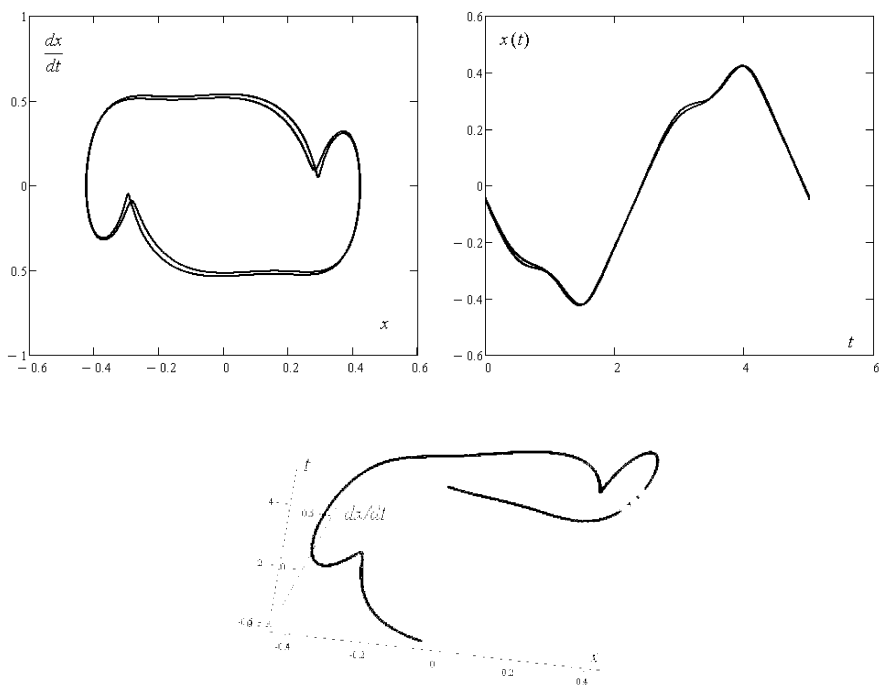


Рис. 1.4.4.24. Фазовые траектории и один период $3T$ -периодических устойчивых решений уравнения (1.4.4.12) при $W = 1,705; 1,715$. В трехмерном пространстве $(x, dx/dt, t)$ приведен один период устойчивого решения при $W = 1,715$

Для сравнения на рис. 1.4.4.25 приведены на одном графике различные устойчивые $3T$ -периодические решения уравнения (1.4.4.12), существующие при одинаковых значениях параметров.

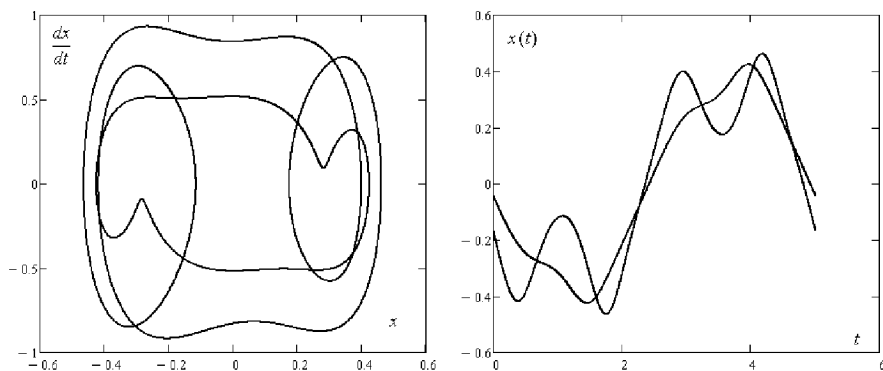


Рис. 1.4.4.25. Фазовые траектории и один период различных устойчивых $3T$ -периодических решений уравнения (1.4.4.12) при $W = 1,70$

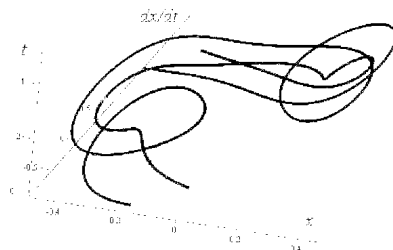


Рис. 1.4.4.25. (окончание)

Рисунок 1.4.4.26 содержит фазовые траектории и зависимость решения от времени для хаотического решения уравнения (1.4.4.12) при $W = 1,5$.

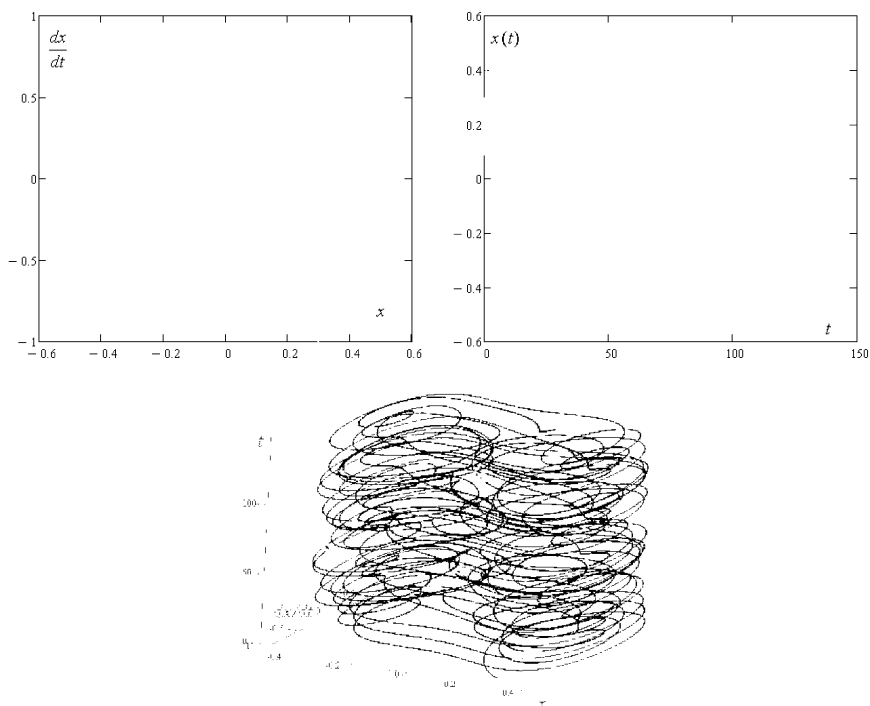


Рис. 1.4.4.26. Фазовые траектории и хаотическое решение уравнения (1.4.4.12) при $W = 1,5$

18. Явления *самоорганизации* (возникновение упорядоченных структур из беспорядочной организации) стали изучаться в середине XX в. Первыми приложениями теории самоорганизации стали зада-

чи химической кинетики и биологии. Примерно в то же время была предложена теория структур в некоторых гидродинамических течениях.

Возникновение упорядоченных структур в нелинейных средах различной природы описывается сходными математическими моделями и решениями. Это позволило распространить методологию, разработанную в теории колебаний, на исследование распространения популяций в экологических задачах или анализ распространения возбуждения в сердечной ткани. Появились новые понятия, возникло новое направление в нелинейном моделировании — теория самоорганизации [1.26], синергетика [1.25]. Большое влияние на прогресс исследований по самоорганизации имели задачи биологии.

Для самоорганизации характерны отсутствие связи с начальными условиями и прямая зависимость параметров структуры от свойств среды. Возникновение самоорганизации в каком-то смысле подобно возникновению устойчивых автоколебаний. Однако понятие самоорганизации намного шире — могут возникать образования, не изменяющиеся во времени, как детерминированные, так и стохастические. Явления самоорганизации разнообразны, и математическими моделями самоорганизующихся систем могут служить предельный цикл для периодических диссипативных структур, странный аттрактор как проявление детерминированного хаоса, сепаратрисы, идущие от одного состояния равновесия к другому.

ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 1

- 1.1. Кондратьев Н.Д. Особое мнение. Кн. 2. — М.: Наука. 1993.
- 1.2. Кондратьев Н.Д. Основные проблемы экономической статики и динамики. — М., 1991.
- 1.3. Кондратьев Н.Д. Проблемы экономической динамики. — М., 1989.
- 1.4. Бородин Л.И. Теория хаоса в социальных науках: проблемы, достижения и открытия 1990-х гг. — http://www.xaos.ru/index.php?option=com_content&task=view&id=285.
- 1.5. *Berry B.J.L. and Kim H. Long Waves 1790-1990: Intermittency, Chaos, and Control. In: Chaos Theory in the Social Sciences: Foundations and Applications. Ed. L.D.Kiel and E.Elliot. Ann Arbor, 1996.*
- 1.6. *DeGreene, K.B. Field-Theoretic Framework for the Interpretation of the Evolution, Instability, Structural Change, and Management of Complex Systems. In: Chaos Theory in the Social Sciences: Foundations and Applications. Ed. L.D.Kiel and E.Elliot. Ann Arbor, 1996.*
- 1.7. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Эдиториал УРСС, 2001.

- 1.8. Кирьянов Д.В. Самоучитель *Mathcad* 12. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
- 1.9. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике / Под ред. А.В. Сидоровича. — М.: Дело и сервис, 2004.
- 1.10. Малыхин В.И. Математика в экономике. — М.: ИНФРА-М, 2002.
- 1.11. Нижегородцев Р.М. Вариационные методы макроэкономической оптимизации инвестиционных процессов. — Финансовая математика / Под ред. Ю.М. Осипова, М.В. Грачевой, Р.М. Нижегородцева, Е.С. Зотовой. — М.: ТЕИС, 2001.
- 1.12. Милованов В.П. Синергетика и самоорганизация: Экономика. Биофизика. — М.: Эдиториал УРСС, 2005.
- 1.13. Смирнов А.Д. Нелинейная динамика переходных процессов в экономике. — М.: Изд-во ВШЭ, 1996.
- 1.14. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия (индустриальная динамика). — М.: Прогресс, 1971.
- 1.15. Форрестер Дж. Динамика развития города. — М.: Прогресс, 1974.
- 1.16. Форрестер Дж. Мировая динамика. — М., АСТ, 2003.
- 1.17. Махов С.А. Математическое моделирование мировой динамики и устойчивого развития на примере модели Форрестера. — М.: Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2005.
- 1.18. Егоров В.А., Каллистов Ю.Н., Митрофанов В.Б., Пионтковский А.А. Математические модели глобального развития. — Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
- 1.19. Кугаенко А.А., Кондрашов П.Е. Методы динамического моделирования в управлении экономикой. — 2-е изд., испр. и доп. (+CD). — М.: Логос, 2005.
- 1.20. Крюков Б.И. Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. — М.: Машиностроение, 1984.
- 1.21. P.J. Holmes. *A nonlinear oscillator with a strange attractor.* — *Philosophical Transaction of the Royal Society. London.* Vol.292.
- 1.22. Л.И. Мандельштам: К 100-летию со дня рождения. — М.: Наука, 1979.
- 1.23. Инфантьев К.А. Особенности циклических колебаний в экономике России. // Экономика и технология: Межвузовский сборник научных трудов. Ч. 1. М.: Изд-во РЭА, 1997.
- 1.24. Устиан И. Экономическая динамика в свете теории «больших циклов» Н.Д. Кондратьева // Экономист. — 1998. — № 9.
- 1.25. Хакен Г. Синергетика. — М.: Мир, 1980.

- 1.26. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. — М.: Мир, 1979.
- 1.27. *Chaos Theory in the Social Sciences: Foundations and Applications*. Ed. L.D. Kiel and E. Elliot. Ann Arbor, 1996.
- 1.28. Brown T.A. *Nonlinear Politics*. В кн: *Chaos Theory in the Social Sciences: Foundations and Applications*. Ed. L.D. Kiel and E. Elliot. Ann Arbor, 1996.
- 1.29. Mantegna R.N. and Stanley H.E. *Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- 1.30. Bouchaud J.-P. and Potters M. *Theory of Financial Risk: From Statistical Physics to Risk Management*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- 1.31. Bouchaud J.-P., Gefen Y., Potters M., and Wyart M., «Fluctuations and response in financial markets: The subtle nature of “random” price changes», *Quantitative Finance* 4(2): 176–190 (2004).
- 1.30. Lillo F. and Farmer J.D., “The long memory of the efficient market”, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics* 8 (3), Article 1 (2004).
- 1.33. Didier Sornette. *Why Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial Systems*. Princeton University Press, Princeton, 2002.
- 1.34. Dragulescu A. and Yakovenko V.M., “Statistical mechanics of money”, *Eur. Phys. J. B* 17, 723–729 (2000).
- 1.35. Smith E. and Shubik M. “Strategic Freedom, Constraint, and Symmetry in One-Period Markets with Cash and Credit Payment”, *Economic Theory* 25, 513–551 (2005).
- 1.36. Shubik M. and Smith E., “The physics of time and dimension in the economics of financial control”, *Physica A* 340, 656–667 (2004).
- 1.37. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. — М.: Мир, 1999.
- 1.38. Арнольд В.И. Теория катастроф. — М.: Едиториал УРСС, 2007.
- 1.39. Маневич Л.И. О теории катастроф // Соросовский образовательный журнал. — Т. 6. — 2000. — № 7.
- 1.40. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
- 1.41. Бабаков И.М. Теория колебаний. — М.: Дрофа, 2004.
- 1.42. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. — М.: Наука, 1971.
- 1.43. Постон Т., Стюарт Й. Теория катастроф и ее приложения. — М.: Мир, 1980.

- 1.44. Лоренц Э. Детерминированное непериодическое течение // Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. — М.: Мир, 1981.
- 1.45. *Feigenbaum M.J. Universal behaviour in nonlinear systems. — Los Alamos Sci., 1980, Vol. 1.*
- 1.46. Гуц А.К., Фролова Ю.В. Математические методы в социологии. — Изд-во ЛКИ, 2007.
- 1.47. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. — СПб.: Изд-во ЛКИ, 2007.
- 1.48. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. — М.: Едиториал УРСС, 2003.
- 1.49. Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. — М.: ИЗОГРАФ, 1997.
- 1.50. *Jean-Philippe Bouchaud. Economics needs a scientific revolution // Nature. Vol. 455. (30 October 2008).*
- 1.51. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка: Пер. с англ. — М.: Мир, 2000.

ГЛАВА 2.1. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ И УСТАНОВИВШИХСЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

2.1.1. ЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Мы рассматриваем динамические модели, основанные на аппарате обыкновенных дифференциальных уравнений. В основе линейных моделей лежат линейные обыкновенные дифференциальные уравнения. Математический инструментарий для работы с такими моделями разработан наиболее полно. Рассмотрим некоторые линейные модели, обращая внимание не только на технику получения и анализа решений, но и на степень их достоверности и область применения. В качестве простейшей модели рассмотрим динамическую модель вынужденных линейных колебаний при отсутствии сопротивления. Уравнение движения получим из (1.2.8.3) при $b = 0$, $\gamma = 0$:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = W \sin(\omega t). \quad (2.1.1.1)$$

Несмотря на то что мы рассматриваем вынужденные колебания, учтем начальные условия при $t = 0$ и выясним их влияние на динамический процесс.

Пусть при $t = 0$

$$x(t)|_{t=0} = x_0, \quad \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = x_1. \quad (2.1.1.2)$$

Общее решение этого неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка при $\omega_0 \neq \omega$ имеет вид

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{W}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t). \quad (2.1.1.3)$$

Произвольные постоянные C_1, C_2 определяются из начальных условий:

$$C_1 = 0; \quad C_2 = \frac{x_1}{\omega_0^2} - \frac{W\omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

С учетом этого общее решение (2.1.1.3) принимает вид

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{x_1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{W\omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega_0 t) + \frac{W}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t). \quad (2.1.1.4)$$

Первые три слагаемых соответствуют колебаниям с собственной частотой ω_0 , последнее — с частотой внешнего воздействия ω .

Первые два слагаемых в (2.1.1.4) соответствуют собственным колебаниям, обусловленным только начальными условиями. При нулевых начальных условиях такие колебания не возникают.

Третье слагаемое общего решения соответствует колебаниям с собственной частотой ω_0 , но амплитуда зависит от амплитуды и частоты внешнего воздействия. Это разновидность свободных колебаний. Такие колебания сопровождают вынужденные колебания и называются свободными сопровождающими колебаниями.

Четвертое слагаемое общего решения соответствует чисто вынужденным колебаниям:

$$x_{\text{вын}}(t) = \frac{W}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t). \quad (2.1.1.5)$$

В линейной системе (2.1.1.1) справедлив принцип суперпозиции. Колебания рассматриваемой линейной динамической системы складываются из трех видов колебаний: 1) собственных; 2) свободных сопровождающих; 3) вынужденных.

Отметим свойства вынужденных колебаний в линейных динамических моделях без учета диссипативных свойств:

- 1) частота вынужденных колебаний равна частоте внешнего воздействия;
- 2) вынужденные колебания не зависят от начальных условий;
- 3) при $\omega < \omega_0$ отклонение системы и внешнее воздействие имеют один знак, т.е. движение системы синфазно с внешним воздействием.

Если $\omega > \omega_0$, движение системы будет в противофазе относительно внешнего воздействия и (2.1.1.5) можно переписать в следующем виде:

$$x_{\text{вын}}(t) = \frac{W}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin(\omega t + \pi);$$

4) при $\omega = \omega_0$ выражение (2.1.1.5) не имеет смысла. Также в этом случае не имеет смысла выражение для свободных сопровождающих колебаний (третье слагаемое в общем решении (2.1.1.4)). Однако рассматриваемые совместно при $\omega = \omega_0$ оба этих движения дают неопределенность

$$\begin{aligned} & -\frac{W\omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega_0 t) + \frac{W}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t) = \\ & = W \left[\frac{-\omega \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega t)}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]_{\omega=\omega_0} = \frac{0}{0}. \end{aligned}$$

Раскрывая эту неопределенность по правилу Лопиталя, получим:

$$\begin{aligned} & W \left[\frac{-\omega \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega t)}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]_{\omega=\omega_0} = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} W \frac{-\sin(\omega_0 t) + \omega_0 t \cos(\omega t)}{-2\omega_0 \omega} = \\ & = \frac{W}{2\omega_0^2} \sin(\omega_0 t) - \frac{Wt}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t). \end{aligned}$$

В итоге при $\omega = \omega_0$ общее решение (2.1.1.4) принимает вид

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{x_1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{W}{2\omega_0^2} \sin(\omega_0 t) - \frac{Wt}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t).$$

Отметим, что в этом решении нет гармоник с частотой внешнего воздействия. Кроме того, последнее слагаемое является непериодической функцией времени t . С течением времени это слагаемое по модулю неограниченно возрастает. Амплитуда соответствующих колебаний неограниченно возрастает по линейному закону (рис. 2.1.1.1).

Явление возрастания амплитуды колебаний при совпадении частоты внешнего воздействия с собственной частотой называется *резонансом*.

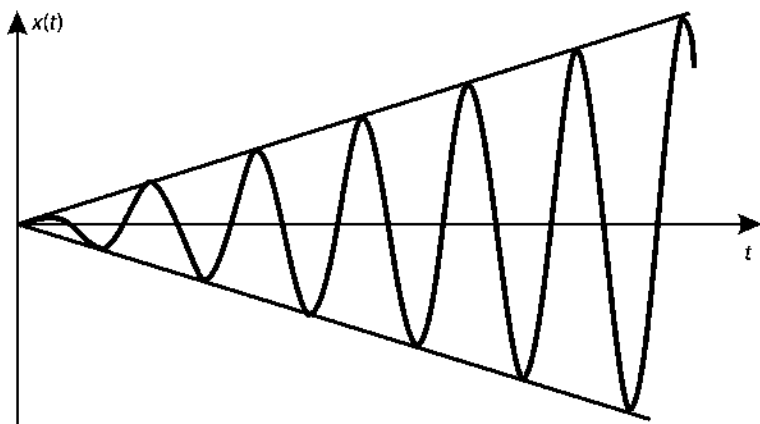


Рис. 2.1.1.1. Возрастание амплитуды колебаний при резонансе

Неограниченное возрастание амплитуды является следствием использования линейной модели. В реальных системах с ростом амплитуды начинают проявляться нелинейные свойства. Использование линейной модели при больших амплитудах ведет к качественно неверным результатам. Становится необходимым учет в модели нелинейных свойств объекта. Заметим, что в нелинейных системах резонансные явления намного разнообразнее, чем в линейных системах.

Безграничное возрастание амплитуды при резонансе линейной динамической системы получено при отсутствии диссипации. Рассмотрим теперь влияние диссипации на вынужденные колебания линейных систем.

Пусть уравнение движения имеет вид

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) + b \frac{dx(t)}{dt} = W \sin(\omega t). \quad (2.1.1.6)$$

Общее решение этого уравнения является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения (при нулевой правой части) и частного решения неоднородного уравнения.

Однородное уравнение рассмотрено выше. Часто при исследовании подобных задач принимается обозначение $b = 2n$.

Ранее получено, что при малой диссипации ($n < \omega_0$) решение имеет вид

$$x(t) = e^{-nt} (C_6 \cos(k_1 t) + C_7 \sin(k_1 t)), \quad k_1 = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}.$$

Это решение определяет свободные затухающие колебания.

Частное решение уравнения (2.1.1.6) будем искать в виде $x_{\text{частн}}(t) = A \sin(\omega t - \alpha)$.

A имеет смысл амплитуды вынужденных колебаний α -начальной фазы.

Величины A и α подбираются так, чтобы при подстановке частного решения в уравнение последнее обратилось в тождество. Исходя из этого сравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, можно получить:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) = W \cos \alpha, 2An\omega = W \sin \alpha.$$

Отсюда

$$A = \frac{W}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2.1.1.7)$$

В итоге получаем общее решение уравнения (2.1.1.6):

$$x(t) = e^{-nt} [C_6 \cos(k_1 t) + C_7 \sin(k_1 t)] + \frac{W}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \sin(\omega t - \alpha).$$

Учитывая начальные условия (2.1.1.2), будем иметь:

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-nt} [\varphi_0 \cos(k_1 t) + \frac{\varphi_1 + n\varphi_0}{k_1} \sin(k_1 t)] + A e^{-nt} [\sin(\alpha) \times \\ \times \cos(k_1 t) + \frac{n \sin(\alpha) - \omega \cos(\alpha)}{k_1} \sin(k_1 t)] + A \sin(\omega t - \alpha). \end{aligned} \quad (2.1.1.8)$$

Первые два экспоненциально затухающих слагаемых полученного общего решения соответствуют свободным и свободным сопровождающим колебаниям. Оба этих вида колебаний с течением времени затухают, и их вкладом в динамический процесс при наличии диссипации можно пренебречь (рис. 2.1.1.2).

Имеет смысл учитывать только вынужденные колебания по закону

$$x(t) = \frac{W}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \sin(\omega t - \alpha). \quad (2.1.1.9)$$

Тот же закон вынужденных колебаний получим и при большой диссипации, когда $n \geq \omega_0$.



Рис. 2.1.1.2. Составляющие динамического процесса при вынужденных колебаниях линейной диссипативной динамической системы

Основные свойства вынужденных колебаний линейных динамических систем с учетом диссипативных свойств системы:

1) вынужденные колебания и при наличии сопротивлений происходят с частотой возмущающей силы. Это общий закон вынужденных колебаний линейных систем, имеющий место независимо от условий, в каких происходят вынужденные колебания, в частности независимо от того, имеются ли в системе сопротивления или нет и какова их величина;

2) амплитуда вынужденных колебаний не зависит от начальных условий и времени. С течением времени она не изменяется, и следовательно, вынужденные колебания, в отличие от свободных колебаний, от сопротивлений не затухают. При резонансе амплитуда вынужденных колебаний остается конечной;

3) максимум амплитуды колебаний достигается не в точке резонанса $\omega = \omega_0$. Легко показать, что значение ω , при котором амплитуда A (2.1.1.7) достигает максимума, определяется формулой $\omega^2 = \omega_0^2 - 2n^2$, т.е. до резонансной частоты $\omega = \omega_0$;

4) в вынужденных колебаниях с сопротивлением всегда имеет место сдвиг фазы колебания по сравнению с фазой возмущающей силы. Величина ϵ этого сдвига определяется формулой $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Максимальное значение сдвига фазы имеет при резонансе, когда $\omega = \omega_0$, и достигает значения $\alpha = \pi/2$.

Из формулы для амплитуды A вынужденных колебаний (2.1.1.7) видно, что эта амплитуда зависит от параметров системы, амплитуды W и частоты ω внешнего воздействия. Для оценки влияния внешних

факторов на динамическую систему используем характеристику динамической системы, называемую коэффициентом динамичности. Коэффициент динамичности показывает, во сколько раз максимальное динамическое отклонение при вынужденных колебаниях A при внешнем воздействии $W\sin(\omega t)$ больше максимального статического отклонения $A_0 = \frac{W}{\omega_0^2}$ под действием постоянного во времени внешнего воздействия W . Коэффициент динамичности k_d определяется формулой

$$k_d = \frac{A}{A_0} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}. \quad (2.1.1.10)$$

Зависимость коэффициента динамичности от частоты и диссипации приведена на рис. 2.1.1.3.

Кривая, соответствующая нулевой диссипации ($n/\omega_0 = 0$), имеет разрыв в точке $\omega/\omega_0 = 1$.

Рассматривая резонансные кривые на рис. 2.1.1.3, обнаруживаем следующий факт, имеющий большое значение в приближенных расчетах амплитуд вынужденных колебаний. В областях, достаточно далеких от резонанса, амплитуды при относительно малом сопротивлении почти не отличаются от соответствующих амплитуд вынужденных колебаний без сопротивления, определяемых более простой формулой $A = \frac{W}{\omega_0^2 - \omega^2}$. В этих областях при вычислении амплитуд

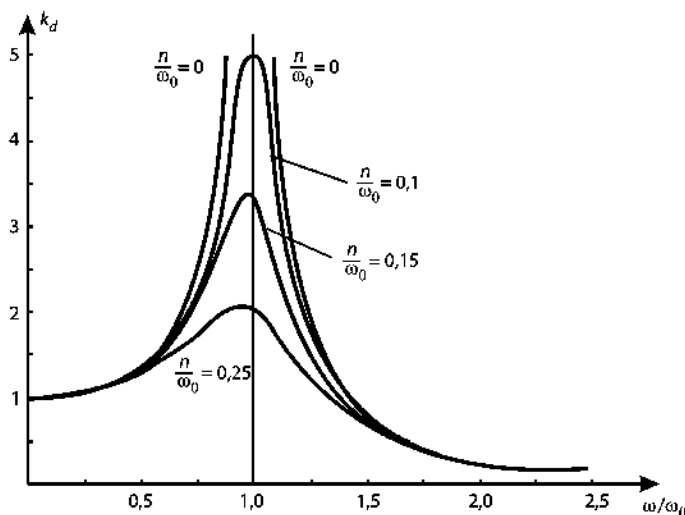


Рис. 2.1.1.3. Зависимость коэффициента динамичности от частоты внешнего воздействия и диссипации

нет смысла пытаться точно учитывать сопротивления, которые вообще с трудом поддаются точному определению. Этот факт частично обосновывает весьма распространенный в моделировании динамических процессов способ учета диссипации линейным слагаемым, пропорциональным производной искомой функции.

Рассмотренный подход к анализу линейных динамических моделей легко обобщается на случай, когда внешнее воздействие содержит несколько различных компонент, например несколько гармоник. Используя принцип суперпозиции, который применим к линейным системам, необходимо найти отклик системы на каждую компоненту внешнего воздействия и просуммировать полученные решения. Этот же прием используется, если внешнее воздействие является периодической функцией, допускающей разложение в ряд Фурье.

2.1.2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Модель считается квазилинейной, если все нелинейные слагаемые малы по сравнению с линейными слагаемыми. Но учет даже этих малых нелинейных влияний позволил получить и объяснить эффекты, которые в принципе не могут быть получены из линейных моделей. Рассмотрим несколько важнейших методов решения квазилинейных задач на примере решения конкретных достаточно простых задач; при этом будем проводить анализ результатов и выделять эффекты, обусловленные слабой нелинейностью. Более общее и строгое изложение методов решения квазилинейных динамических задач следует искать в специализированной литературе. Обширная библиография классических изданий по данному направлению имеется в справочнике [2.1].

Естественно, что объективно существующий в природе объект или протекающий динамический процесс в некоторых ситуациях может с достаточной точностью рассматриваться как линейная система; в некоторых ситуациях точность линейной модели становится недостаточной и применяются квазилинейные подходы. Существует диапазон значений параметров, при которых точность квазилинейного моделирования будет недостаточна. При этом необходимо использовать существенно нелинейные модели. Этот вопрос обсуждается в п. 2.1.3.

Квазилинейный характер некоторых слагаемых в модели принято обозначать введением малого положительного множителя $0 < \mu \ll 1$. Сделаем некоторые предварительные замечания об уровне строгости методов решения задач динамики, основанных на идее малого параметра. Известны результаты, устанавливающие существо-

вание, единственность, аналитичность, а также устойчивость периодического решения лишь при достаточно малых значениях μ . Каждая прикладная задача теории колебаний содержит конечные значения параметра μ , который в некотором диапазоне других параметров системы может оказаться малым. Сходимость рядов, а также устойчивость решений при этих конечных значениях параметра μ в подавляющем большинстве прикладных исследований не изучают, так как, во-первых, это трудоемкий процесс, во-вторых, соответствующие оценки часто оказываются неэффективными, ибо всегда ориентированы на худший случай. Таким образом, строго установленные результаты, полученные при достаточно малом μ , фактически используются без обоснования достаточной степени малости параметра μ в конкретной задаче. В связи с этим, а также в связи с тем, что обычно находят лишь одно—три слагаемых в разложении по малому параметру, точность получаемых результатов следует контролировать до достижения рационального уровня, используя, например, исследование практической сходимости. Строгие теоремы обоснования имеют «утешительный» характер: при $\mu \rightarrow 0$ решение стремится к точному.

Применимость метода малого параметра к системам, не содержащим малого параметра, определяемого постановкой задачи. Метод малого параметра можно эффективно применять не только для изучения систем, в которых малый параметр определяется постановкой задачи и присутствует в явной форме, но и в тех вариантах, когда исходя из каких-либо соображений можно предположить, что исследуемое движение мало отличается от движения некоторого определенного вида, например от гармонических колебаний и т.п., а также когда определенные совокупности членов в уравнениях малы вблизи рассматриваемых решений, несмотря на то что каждый из этих членов в отдельности не является малым. Таким образом, методы, основанные на идее малого параметра, применимы не только при наличии в системе явно присутствующего малого параметра, но и при близости решений порождающего уравнения (при $\mu = 0$) и решений квазилинейного уравнения. Как и во многих приближенных методах, эффективность во многом определяется удачным или неудачным выбором стартового приближения.

Известен метод искусственного введения в модель малого параметра. Пусть из каких-либо априорных соображений, анализа частных случаев и т.п. можно предположить, что периодические решения заданной системы уравнений

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k(t, x_1, \dots, x_n),$$

$$k = 1, \dots, n,$$

близки к функциям некоторого определенного вида $x^\circ = x^\circ(t, a_1, a_2, \dots, a_m)$, где $a_1, a_2, \dots, a_m$ — параметры. Пусть

$$\frac{dx_k^\circ(t)}{dt} = f_k^\circ(|t|, x_1^\circ, \dots, x_n^\circ),$$

$$k = 1, \dots, n, \quad -$$

система, которой удовлетворяют функции x° . Запишем исходную систему в виде

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k^0(|t|, x_1, \dots, x_n) + \mu \Phi_k(|t|, x_1, \dots, x_n),$$

$$k = 1, \dots, n,$$

где $\mu \Phi_k(|t|, x_1, \dots, x_n) = f_k(|t|, x_1^\circ, \dots, x_n^\circ) - f_k^0(|t|, x_1, \dots, x_n)$,
 $k = 1, \dots, n$.

Эта функция является малой по предположению о близости решения x° к решениям исходной системы. Изложенный метод искусственного введения малого параметра является рациональным построением и не претендует на строгость. Практическое применение метода малого параметра в целом также проходит на рациональном уровне, поэтому и указанное рассуждение имеет тот же уровень строгости.

Метод малого параметра позволяет получать принципиально новые результаты, недостижимые на уровне линейного моделирования, и в принципе не позволяет получать решения, далекие от решений порождающего уравнения. Эти решения исследуются в существенно нелинейной постановке.

Метод малого параметра. Нерезонансный вариант

Рассмотрим квазилинейное уравнение, полученное из (1.3.2.4):

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 [x(t) - \frac{1}{6} x^3(t)] = W \sin(\omega t). \quad (2.1.2.1)$$

При этом мы не будем учитывать сопротивление, то есть в (1.3.2.4) полагаем $b = 0$.

Будем считать, что колебания происходят с небольшой амплитудой, так что $x^3(t) \ll x(t)$. Кроме того, предполагаем, что между частотой собственных колебаний ω_0 и частотой внешнего воздействия ω нет резонансного соотношения, т.е.

$$\omega_0 \neq \omega. \quad (2.1.2.2)$$

В дальнейшем мы дополним условия (2.1.2.2), предполагая отсутствие резонансных соотношений на всех гармониках.

Введем малый параметр $0 < \mu < 1$ и перепишем уравнение (2.1.2.1), оставив в левой части линейные слагаемые:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = W \sin(\omega t) + \mu \gamma x^3(t). \quad (2.1.2.3)$$

Множитель $1/6$ мы включили в коэффициент γ .

Основная идея метода малого параметра: решение уравнения (2.1.2.3) мы будем искать в виде разложения по степеням малого параметра μ и приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра:

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \mu^3 x_3(t) + \dots, \quad (2.1.2.4)$$

где $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, ... — подлежащие определению функции. На первый взгляд, кажется, что задача стала сложнее, так как вместо одной неизвестной функции времени $x(t)$ мы получили счетное количество неизвестных функций $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, Однако для определения этих функций можно построить эффективный алгоритм.

Подставляем вид решения (2.1.2.4) в уравнение (2.1.2.3) и получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 (x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \mu^3 x_3(t) + \dots)}{dt^2} + \\ & + \omega_0^2 (x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \mu^3 x_3(t) + \dots) = \\ & = W \sin(\omega t) + \mu \gamma (x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \mu^3 x_3(t) + \dots)^3 \end{aligned} \quad (2.1.2.5)$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра μ . При этом становится проще работать с кубом от ряда в правой части уравнения (2.1.2.5), так как мы будем учитывать только слагаемые, содержащие малый параметр μ в нужной степени.

При μ^0 получаем:

$$\frac{d^2 x_0(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x_0(t) = W \sin(\omega t). \quad (2.1.2.6)$$

Заметим, что это уравнение получается из (2.1.2.3) при $\mu = 0$. Такое уравнение называется порождающим. Уравнение (2.1.2.6) является линейным неоднородным уравнением второго порядка. Оно

имеет аналитическое решение. Учитывая нерезонансное соотношение (2.1.2.2), частное решение, отвечающее правой части уравнения (2.1.2.6) и соответствующее вынужденным колебаниям, имеет вид

$$x_0(t) = \frac{W}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \quad (2.1.2.7)$$

При μ^1 получаем:

$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x_1(t) = \gamma x_0^3(t). \quad (2.1.2.8)$$

Но функция $x_0(t)$ определена на предыдущей итерации и имеет вид (2.1.2.7).

В результате для определения функции $x_1(t)$ имеем линейное неоднородное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x_1(t) = \gamma \left(\frac{W}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^3 \sin^3(\omega t). \quad (2.1.2.9)$$

Разложим $\sin^3(\omega t)$ в ряд Фурье (в данном случае тот же результат можно получить, используя формулы тригонометрических преобразований):

$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x_1(t) = \gamma \left(\frac{W}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^3 \frac{1}{4} [-\sin(3\omega t) + 3\sin(\omega t)]. \quad (2.1.2.10)$$

Так как уравнение (2.1.2.10) является линейным, используем принцип суперпозиции и найдем частные решения, соответствующие обоим слагаемым в правой части. Решение (2.1.2.10) ищем в виде

$$x_1(t) = B \sin(3\omega t) + C \sin(\omega t). \quad (2.1.2.11)$$

Подставляем решение (2.1.2.11) в уравнение (2.1.2.10):

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 (B \sin(3\omega t) + C \sin(\omega t))}{dt^2} + \omega_0^2 [B \sin(3\omega t) + C \sin(\omega t)] = \\ & = \gamma \left(\frac{W}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^3 \frac{1}{4} [-\sin(3\omega t) + 3\sin(\omega t)]. \end{aligned}$$

Так как знак равенства в последнем выражении должен иметь место в любой момент времени t , приравниваем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях.

При $\sin(\omega t)$: $-C\omega^2 + \omega_0^2 C = \frac{3}{4} \gamma \left(\frac{W}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^3$, откуда получаем:

$C = \frac{3\gamma W^3}{4(\omega_0^2 - \omega^2)^4}$. Для определения константы B имеем:

$$(-9\omega^2 + \omega_0^2)B = -\frac{\gamma}{4} \left(\frac{W}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^3. \quad (2.1.2.12)$$

Отсюда видно, что при $\omega \rightarrow \omega_0/3$ коэффициент $B \rightarrow \infty$, т.е. получается резонанс на третьей гармонике. Но мы рассматриваем нерезонансный случай, поэтому соотношение (2.1.2.2) дополняем условием

$$\omega \neq \omega_0/3, \quad (2.1.2.13)$$

и тогда из (2.1.2.12) легко определить B .

В результате в первом приближении метода малого параметра в нерезонансном варианте получаем решение:

$$x(t) \approx x_0(t) + \mu x_1(t) = \frac{W}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t) + \mu [B \sin(3\omega t) + C \sin(\omega t)]. \quad (2.1.2.14)$$

Анализируя полученное решение в первом приближении, можно видеть, что по сравнению с решением линейного порождающего уравнения произошло уточнение амплитуды первой гармоники и, самое главное, в решении появилась третья гармоника. По ходу решения для третьей гармоники получены резонансные соотношения (2.1.2.13).

Аналогично можно построить следующие приближения метода малого параметра.

При μ^2 получаем:

$$\frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x_2(t) = 3\gamma x_1(t) x_0^2(t). \quad (2.1.2.15)$$

Функции $x_0(t)$, $x_1(t)$ определены на предыдущих итерациях и имеют вид (2.1.2.7), (2.1.2.11). Подставляя их выражения в правую часть

(2.1.2.15) и преобразуя эту правую часть в отрезок ряда Фурье, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x_2(t) = \sin(\omega t) & \left[\gamma \left(\frac{W}{\omega_0^2 - \omega_0} \right)^2 \left(\frac{9}{4} C - \frac{3}{4} B \right) \right] + \\ + \sin(3\omega t) & \left[\gamma \left(\frac{W}{\omega_0^2 - \omega_0} \right)^2 \left(\frac{3}{2} B - \frac{3}{4} C \right) \right] + \\ + \sin(5\omega t) & \left[\gamma \left(\frac{W}{\omega_0^2 - \omega_0} \right)^2 \left(-\frac{3}{4} B \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.1.2.16)$$

Поправку второго приближения $\varphi_2(t)$ ищем в виде

$$x_2(t) = D \sin(\omega t) + E \sin(3\omega t) + F \sin(5\omega t). \quad (2.1.2.17)$$

Подставляя (2.1.2.17) в (2.1.2.16) и приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим еще одно резонансное соотношение для пятой гармоники —

$$\omega \neq \omega_0/5 — \quad (2.1.2.18)$$

и значения констант D, E, F .

Решение во втором приближении метода малого параметра имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) \approx x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) = \frac{W}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t) + \mu [B \sin(3\omega t) + \\ + C \sin(\omega t)] + \mu^2 [D \sin(\omega t) + E \sin(3\omega t) + F \sin(5\omega t)]. \end{aligned} \quad (2.1.2.19)$$

Отсюда видно, что второе приближение позволило немного уточнить амплитуды первой и третьей гармоник и, самое главное, позволило учесть в решении пятую гармонику. По ходу решения получены резонансные соотношения для пятой гармоники.

Этот алгоритм можно продолжить до достижения требуемой точности.

Основные новые по сравнению с линейной моделью результаты, которые получены нерезонансным вариантом метода малого параметра: выяснилось, что в рассматриваемой нелинейной системе существуют дополнительные резонансы на высших гармониках, найдены резонансные частоты. Выяснилось также, что решение содержит счетное число нечетных гармоник. Заметим, что четные

гармоники отсутствуют в решении из-за нечетности исходной модели (2.1.2.1).

Метод малого параметра. Резонансный вариант

Рассмотрим теперь резонансный вариант метода малого параметра. Исходную систему примем в том же виде (2.1.2.1). Но, в силу того что из анализа резонансных колебаний в линейных системах известно, что для достижения значительных амплитуд к системе в резонансном режиме нужно прикладывать меньшее внешнее воздействие, примем внешнее воздействие малой величиной. Тогда вместо (2.1.2.3) имеем:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = \mu W \sin(\omega t) + \mu \chi x^3(t). \quad (2.1.2.20)$$

Так как мы рассматриваем резонансный вариант, будем считать, что разность между частотами ω и ω_0 мала. Обозначим

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \mu \chi. \quad (2.1.2.21)$$

Величина χ называется расстройкой. Перепишем (2.1.2.20) с учетом (2.1.2.21):

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = \mu [W \sin(\omega t) + \chi x^3(t) - \chi x(t)]. \quad (2.1.2.22)$$

Решение этого уравнения будем также искать в виде ряда по степеням малого параметра μ (2.1.2.4). Подставляем (2.1.2.4) в (2.1.2.22) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра.

При μ^0 получаем:

$$\frac{d^2 x_0(t)}{dt^2} + \omega^2 x_0(t) = 0. \quad (2.1.2.23)$$

Общее решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид

$$x_0(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t). \quad (2.1.2.24)$$

Константы A и B в рамках этого приближения мы определить не можем, так как ищется периодическое решение исходной задачи. Перейдем к следующему приближению.

При μ^1 получаем:

$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \omega^2 x_1(t) = W \sin(\omega t) + \gamma (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))^3 - \chi (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)). \quad (2.1.2.25)$$

Преобразуя правую часть (2.1.2.25) в отрезок ряда Фурье (в этом частном случае можно воспользоваться формулами тригонометрических преобразований), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \omega^2 x_1(t) = & \left(W - \chi B + \frac{3}{4} \gamma A^2 B + \frac{3}{4} \gamma B^3 \right) \sin(\omega t) + \\ & + \left(-\chi A + \frac{3}{4} \gamma A^3 + \frac{3}{4} \gamma A B^2 \right) \cos(\omega t) + \left(\frac{3}{4} \gamma A^2 B - \frac{1}{4} \gamma B^3 \right) \sin(3\omega t) + \\ & + \left(\frac{1}{4} \gamma A^3 - \frac{3}{4} \gamma A B^2 \right) \cos(3\omega t). \end{aligned} \quad (2.1.2.26)$$

Это неоднородное линейное уравнение, соответствующее вынужденным колебаниям системы с собственной частотой ω . В правой части есть гармоники $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$. Следовательно, мы получим резонансные колебания в линейной системе без диссипации. Амплитуда таких колебаний стремится к бесконечности. Но мы ищем периодическое решение, бесконечная амплитуда не соответствует виду искомого решения. Поэтому, чтобы получить искомое периодическое решение, полагаем равными нулю коэффициенты при гармониках в правой части уравнения (2.1.2.26) $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$. В результате получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно констант A и B :

$$\begin{cases} W - \chi B + \frac{3}{4} \gamma A^2 B + \frac{3}{4} \gamma B^3 = 0 \\ -\chi A + \frac{3}{4} \gamma A^3 + \frac{3}{4} \gamma A B^2 = 0. \end{cases} \quad (2.1.2.27)$$

Из второго уравнения видно, что $A = 0$ удовлетворяет этому уравнению. Тогда из первого уравнения системы (2.1.2.27) получаем кубичное уравнение для определения константы B :

$$W - \chi B + \frac{3}{4} \gamma B^3 = 0. \quad (2.1.2.28)$$

В этом случае константа B имеет смысл амплитуды колебаний решения нулевого приближения.

Кубическое алгебраическое уравнение имеет один или три действительных корня. Проводя анализ корней кубического уравнения (2.1.2.28) в зависимости от параметров системы, можно построить амплитудно-частотную характеристику вынужденных нелинейных колебаний (рис. 2.1.2.1).

Пунктиром обозначена скелетная кривая, соответствующая собственным колебаниям соответствующей (2.1.2.1) консервативной системы (при $W=0$).

При отсутствии диссипации две верхние ветви амплитудно-частотной характеристики не ограничены при возрастании ω , однако в реальных системах всегда присутствует диссипация. В этом случае две верхние ветви смыкаются при некотором конечном значении частоты $\omega = \omega_2$. Отметим также, что при $\omega > \omega_1$ верхняя и нижняя ветви амплитудно-частотной характеристики соответствуют устойчивым решениям, средняя ветвь — неустойчивым.

Рассмотрим поведение системы при изменении частоты ω от нуля в сторону возрастания. Движения системы будут соответствовать верхней ветви амплитудно-частотной характеристики вплоть до точки $\omega = \omega_2$. В этой точке произойдет скачкообразный переход на нижнюю ветвь амплитудно-частотной характеристики. В окрестности этой точки малому изменению параметра ω соответствуют большие изменения в поведении системы.

Рассмотрим эволюцию движения при изменении частоты ω от больших значений в сторону уменьшения частоты. Состояние системы будет соответствовать нижней ветви амплитудно-частотной характеристики вплоть до точки $\omega = \omega_1$. В этой точке произойдет скачкообразный переход на верхнюю ветвь амплитудно-частотной характеристики. В окрестности и этой точки малому изменению параметра ω соответствуют большие изменения в поведении системы.

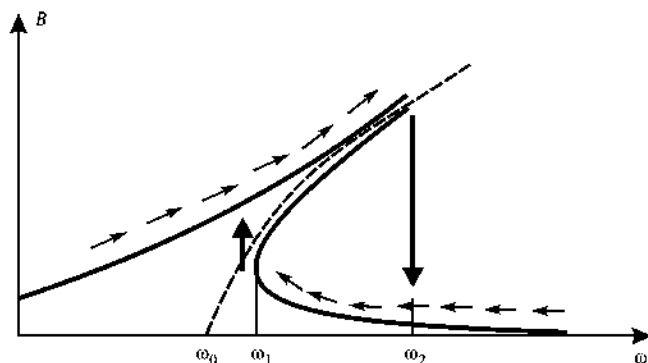


Рис. 2.1.2.1. Амплитудно-частотная характеристика квазилинейной системы

В диапазоне частот $\omega_1 < \omega < \omega_2$ существуют два различных устойчивых состояния системы, соответствующие колебаниям с различными амплитудами в соответствии с верхней и нижней ветвями амплитудно-частотной характеристики.

Таким образом, с помощью резонансного варианта метода малого параметра в первом приближении (причем исследование этого приближения еще не закончено, на этом этапе определены только константы нулевого приближения) обнаружены следующие нелинейные эффекты в анализируемой системе: возможность скачкообразных переходов системы из одного состояния в другое при малом изменении частоты внешнего воздействия, область существования двух различных устойчивых режимов.

Продолжим анализ уравнения первого приближения. Теперь уравнение (2.1.2.26) принимает вид

$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \omega^2 x_1(t) = \left(-\frac{1}{4} \gamma B^3 \right) \sin(3\omega t). \quad (2.1.2.28')$$

Частное решение, соответствующее правой части, ищем в виде

$$x_1(t) = D \sin(3\omega t). \quad (2.1.2.29)$$

Подставляя (2.1.2.29) в (2.1.2.28'), найдем $D = \frac{\gamma B^3}{32\omega^2}$. D имеет смысл амплитуды третьей гармоники в решении.

Общее решение неоднородного линейного уравнения (2.1.2.28) имеет вид

$$x_1(t) = B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) + D \sin(3\omega t). \quad (2.1.2.30)$$

Как и в предыдущем приближении, на этом этапе у нас нет условий, из которых можно определить константы B_1 и B_2 . Переходим к следующему приближению метода.

Сравнивая множители при μ^1 , получаем:

$$\frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \omega^2 x_2(t) = 3\gamma x_0^2(t) x_1(t) - \chi x_1(t). \quad (2.1.2.31)$$

Подставляя выражения для $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \omega^2 x_2(t) = & \left[3\gamma (B \sin(\omega t))^2 - \chi \right] \times \\ & \times [B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) + D \sin(3\omega t)]. \end{aligned} \quad (2.1.2.32)$$

Преобразуя правую часть (2.1.2.32) в отрезок ряда Фурье, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \omega^2 x_2(t) = & \left(-\chi B_1 - \frac{3}{4} \gamma B^2 D + \frac{9}{4} \gamma B^2 B_1 \right) \sin(\omega t) + \\ & + \left(-\chi B_2 - \frac{3}{4} \gamma B_2 B^2 \right) \cos(\omega t) + \left(-\chi D + \frac{3}{4} \gamma B^2 D - \frac{3}{4} \gamma B^2 B_1 \right) \sin(3\omega t) - \\ & - \frac{3}{4} \gamma B^2 B_2 \cos(3\omega t) - \frac{3}{4} \gamma B^2 D \sin(5\omega t). \end{aligned} \quad (2.1.2.33)$$

Как и в предыдущем приближении, получено неоднородное линейное уравнение, соответствующее вынужденным колебаниям системы с собственной частотой ω . В правой части есть гармоники $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$. По тем же соображениям, которые использованы при анализе предыдущего приближения, полагаем равными нулю коэффициенты при гармониках $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$ в правой части уравнения (2.1.2.33). В результате получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно констант B_1 и B_2 :

$$\begin{cases} -\chi B_1 - \frac{3}{4} \gamma B^2 D + \frac{9}{4} \gamma B^2 B_1 = 0 \\ -\chi B_2 + \frac{3}{4} \gamma B_2 B^2 = 0. \end{cases} \quad (2.1.2.34)$$

Второму уравнению этой системы удовлетворяет значение $B_2 = 0$. Из первого уравнения следует, что при $\frac{9}{4} \gamma B^2 - \chi \neq 0$ (учитывая малость расстройки χ , это ограничение определяет область применимости метода)

$$B_1 = \frac{\frac{3}{4} \gamma B^2 D}{\frac{9}{4} \gamma B^2 - \chi}. \quad (2.1.2.35)$$

Итак, решение в первом приближении имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) \approx x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) = & B \sin(\omega t) + \\ & + \mu \left(B_1 \sin(\omega t) + D \sin(3\omega t) \right). \end{aligned} \quad (2.1.2.37)$$

Видно, что первое приближение дает поправку к амплитуде нулевого приближения и добавляет в решение третью гармонику.

Итерации можно продолжать до получения требуемой точности.

Метод осреднения

Рассмотрим ту же систему (2.1.2.20), которую мы исследовали с помощью резонансного варианта метода малого параметра. Аналогично вводим расстройку χ и приходим к уравнению второго порядка (2.1.2.22). Этому уравнению эквивалентна система двух уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -\omega^2 x(t) + \mu (W \sin(\omega t) + \chi x^3(t) - \chi x(t)). \end{cases} \quad (2.1.2.38)$$

Основными неизвестными этой системы являются функции $x(t)$ и $y(t)$. Введем вместо этих переменных новые переменные $A(t)$ и $B(t)$, связанные со старыми переменными соотношениями

$$\begin{cases} x(t) = A(t) \cos(\omega t) + B(t) \sin(\omega t) \\ y(t) = -\omega A(t) \sin(\omega t) + \omega B(t) \cos(\omega t). \end{cases} \quad (2.1.2.39)$$

Первое условие из (2.1.2.39) означает, что решение системы мы ищем именно в таком виде — колебания с одной первой гармоникой с амплитудой, зависящей от времени. Но если мы ищем решение в таком виде, то никаких других решений мы этим методом не найдем.

Замена (2.1.2.39) должна быть непротиворечива по отношению к (2.1.2.38), т.е. должно выполняться условие $\frac{dx(t)}{dt} = y(t)$. Запишем это условие с учетом (2.1.2.39):

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} \cos(\omega t) - A(t) \omega \sin(\omega t) + \frac{dB(t)}{dt} \sin(\omega t) + B(t) \omega \cos(\omega t) = \\ = -\omega A(t) \sin(\omega t) + \omega B(t) \cos(\omega t). \end{aligned}$$

После очевидных преобразований получаем:

$$\frac{dA(t)}{dt} \cos(\omega t) + \frac{dB(t)}{dt} \sin(\omega t) = 0. \quad (2.1.2.40)$$

Из второго выражения (2.1.2.39) находим $\frac{dy(t)}{dt}$ и учитываем первое соотношение (2.1.2.39) и второе из (2.1.2.38):

$$\begin{aligned} & -A(t)\omega^2 \cos(\omega t) - \frac{dA(t)}{dt} \omega \sin(\omega t) - B(t)\omega^2 \sin(\omega t) + \frac{dB(t)}{dt} \omega \cos(\omega t) = \\ & = -\omega^2 [A(t)\cos(\omega t) + B(t)\sin(\omega t)] + \mu\{W \sin(\omega t) + \gamma[A(t)\cos(\omega t) + \\ & + B(t)\sin(\omega t)]^3 - \chi[A(t)\cos(\omega t) + B(t)\sin(\omega t)]t\}. \end{aligned} \quad (2.1.2.41)$$

Объединяя (2.1.2.41) с (2.1.2.40), получаем систему относительно новых переменных $A(t)$ и $B(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dA(t)}{dt} \cos(\omega t) + \frac{dB(t)}{dt} \sin(\omega t) = 0 \\ -\frac{dA(t)}{dt} \omega \sin(\omega t) + \frac{dB(t)}{dt} \omega \cos(\omega t) = \mu\{W \sin(\omega t) + \gamma[A(t)\cos(\omega t) + \\ + B(t)\sin(\omega t)]^3 - \chi[A(t)\cos(\omega t) + B(t)\sin(\omega t)]t\}. \end{cases} \quad (2.1.2.42)$$

Рассматривая эту систему как линейную алгебраическую систему относительно функций $dA(t)/dt$ и $dB(t)/dt$, выделим эти производные. Для решения этой линейной алгебраической системы удобно использовать метод Крамера.

Главный и вспомогательные определители системы имеют вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \end{vmatrix} = \omega,$$

$$\Delta_{\frac{dA}{dt}} = -\mu \sin(\omega t) \{W \sin \omega t + \gamma[A(t)\cos(\omega t) + B(t)\sin(\omega t)]^3 -$$

$$-\chi[A(t)\cos(\omega t) + B(t)\sin(\omega t)]\},$$

$$\Delta_{\frac{dB}{dt}} = \mu \cos(\omega t) \{W \sin \omega t + \gamma[A(t)\cos(\omega t) + B(t)\sin(\omega t)]^3 -$$

$$-\chi[A(t)\cos(\omega t) + B(t)\sin(\omega t)]\}.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} \frac{dA(t)}{dt} = -\frac{\mu}{\omega} \sin(\omega t) \{W \sin \omega t + \gamma [A(t) \cos(\omega t) + B(t) \sin(\omega t)]^3 - \\ - \chi [A(t) \cos(\omega t) + B(t) \sin(\omega t)]\} \\ \frac{dB(t)}{dt} = \frac{\mu}{\omega} \cos(\omega t) \{W \sin \omega t + \gamma [A(t) \cos(\omega t) + B(t) \sin(\omega t)]^3 - \\ - \chi [A(t) \cos(\omega t) + B(t) \sin(\omega t)]\} \end{cases} \quad (2.1.2.43)$$

Отметим главную особенность этой системы. Мы ищем установившийся режим колебаний. Скорости изменения искомых функций $dA(t)/dt$ и $dB(t)/dt$ пропорциональны малому параметру μ . Система в такой форме записи называется системой в стандартной форме. Основная идея метода осреднения заключается в том, что медленно меняющиеся функции (ведь скорость изменения пропорциональна малому параметру) заменяются их средним значением. Иными словами, для медленно меняющихся T -периодических функций вводится оператор осреднения, действующий по закону

$$\bar{A} = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt. \quad (2.1.2.44)$$

Черточка над символом означает осредненную величину.

Смысл этого оператора иллюстрируется рис. 2.1.2.2. Площадь фигуры под кривой $A(t)$ равна площади прямоугольника, верхняя сторона которого является прямой, соответствующей среднему значению.

Применим оператор осреднения к системе (2.1.2.43). Учтем, что мы ищем периодическое установившееся движение и что после осреднения и замены медленно меняющихся функций на константы

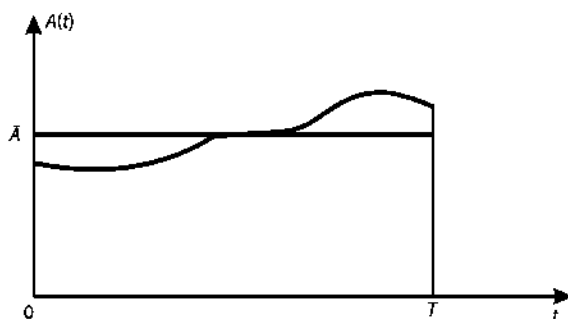


Рис. 2.1.2.2. Действие оператора осреднения

производная от константы равна нулю. После вычисления интегралов получим:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\mu}{\omega} \left(\frac{1}{2} W + \frac{3}{8} \gamma B^3 + \frac{3}{8} \gamma A^2 B - \chi \frac{B}{2} \right) \\ 0 = \frac{\mu}{\omega} \left(\frac{3}{8} \gamma A^3 + \frac{3}{8} \gamma B^2 A - \frac{1}{2} \chi A \right). \end{cases} \quad (2.1.2.45)$$

Сопоставив систему (2.1.2.45) с системой (2.1.2.27), полученной в первом приближении резонансного варианта метода малого параметра, увидим, что эти системы совпадают с точностью до постоянного множителя, т.е. они эквивалентны. Таким образом, с помощью метода осреднения мы получили тот же результат, что и в первом приближении резонансного варианта метода малого параметра. Результаты решения представлены на рис. 2.1.2.1.

Рассмотрим применение метода осреднения к решению автономных квазилинейных задач.

Пусть движение системы описывается уравнением

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\mu\delta \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) - \mu\gamma x^3(t) = 0. \quad (2.1.2.46)$$

Слагаемое $2\mu\delta \frac{dx(t)}{dt}$ соответствует учету в модели малого сопротивления, пропорционального скорости.

Система уравнений, эквивалентная уравнению (2.1.2.46), имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -\omega_0^2 x(t) - 2\mu\delta \frac{dx(t)}{dt} + \mu\gamma x^3(t). \end{cases} \quad (2.1.2.47)$$

Вместо основных неизвестных $x(t)$ и $y(t)$ введем новые неизвестные функции $F(t)$ и $\theta(t)$, связанные с прежними функциями следующим образом:

$$\begin{cases} x(t) = F(t) \sin(\omega_0 t + \theta(t)) \\ y(t) = \omega_0 F(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)). \end{cases} \quad (2.1.2.48)$$

Легко видеть, что $F(t)$ и $\theta(t)$ имеют смысл амплитуды и начальной фазы колебаний.

Выполняя стандартные преобразования метода осреднения, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} \sin(\omega_0 t + \theta(t)) + F(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)) \left(\omega_0 + \frac{d\theta(t)}{dt} \right) = \\ = \omega_0 F(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} \omega_0 \cos(\omega_0 t + \theta(t)) - \omega_0 F(t) \sin(\omega_0 t + \theta(t)) \left(\omega_0 + \frac{d\theta(t)}{dt} \right) = \\ = -\omega_0^2 F(t) \sin(\omega_0 t + \theta(t)) - 2\mu\delta\omega_0 F(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)) + \\ + \mu\gamma [F(t) \sin(\omega_0 t + \theta(t))]^3. \end{aligned}$$

Система для $F(t)$ и $\theta(t)$ имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dF(t)}{dt} \sin(\omega_0 t + \theta(t)) + \frac{d\theta(t)}{dt} F(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)) = 0 \\ \frac{dF(t)}{dt} \omega_0 \cos(\omega_0 t + \theta(t)) - \frac{d\theta(t)}{dt} \omega_0 F(t) \sin(\omega_0 t + \theta(t)) = \\ = -2\mu\delta\omega_0 F(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)) + \mu\gamma [F(t) \sin(\omega_0 t + \theta(t))]^3. \end{cases} \quad (2.1.2.49)$$

Приведем эту систему к стандартной форме:

$$\begin{cases} \frac{dF(t)}{dt} = \frac{\cos(\omega_0 t + \theta(t))}{\omega_0} \{-2\mu\delta\omega_0 F(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)) + \\ + \mu\gamma [F(t) \sin(\omega_0 t + \theta(t))]^3\} \\ \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{-\sin(\omega_0 t + \theta(t))}{\omega_0 F(t)} \{-2\mu\delta\omega_0 F(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)) + \\ + \mu\gamma [F(t) \sin(\omega_0 t + \theta(t))]^3\}. \end{cases}$$

Применим к этой системе оператор осреднения. В результате получим осредненную систему:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{F}(t)}{dt} = -\mu\delta\bar{F}(t) \\ \frac{d\bar{\theta}(t)}{dt} = -\frac{3\mu\gamma}{8\omega_0} \bar{F}^2(t). \end{cases} \quad (2.1.2.50)$$

Здесь в отличие от предыдущего примера мы ищем затухающие колебания.

Из первого уравнения (2.1.2.50) получаем:

$$\bar{F} = \bar{F}_0 e^{-\mu \delta t}, \quad (2.1.2.51)$$

где $\bar{F}_0$ — начальное значение. Видно, что колебания являются экспоненциально затухающими.

Теперь из второго уравнения (2.1.2.50) с учетом (2.1.2.51) можно получить:

$$\bar{\theta}(t) = \frac{3\gamma}{16\omega_0\delta} F_0^2 e^{-2\mu\delta t} + \theta_0, \quad (2.1.2.52)$$

где θ_0 — начальная фаза.

Приближенное решение имеет вид

$$x(t) \approx F_0 e^{-\mu\delta t} \sin(\omega_0 t + \frac{3\gamma}{16\omega_0\delta} F_0^2 e^{-2\mu\delta t} + \theta_0). \quad (2.1.2.53)$$

Чтобы выяснить смысл аргумента синуса, разложим экспоненту в ряд в окрестности точки $t = 0$:

$$e^{-2\mu\delta t} \approx 1 - 2\mu\delta t + \dots \quad (2.1.2.54)$$

Тогда из (2.1.2.53) получаем:

$$\begin{aligned} x(t) &\approx F_0 e^{-\mu\delta t} \sin(\omega_0 t + (1 - 2\mu\delta t)) = \\ &= F_0 e^{-\mu\delta t} \sin[(\omega_0 - \frac{3\gamma}{8\omega_0\delta} F_0^2)t + (\theta_0 - \frac{3\gamma}{16\omega_0\delta} F_0^2)]. \end{aligned} \quad (2.1.2.55)$$

Из этого представления решения видно, что частота колебаний $\Omega = \omega_0 - \frac{3\gamma}{8\omega_0\delta} F_0^2$ (множитель при времени t в аргументе синуса) зависит от начальной амплитуды колебаний F_0 . Это справедливо при таких значениях времени t , где с достаточной точностью выполняется разложение (2.1.2.54).

2.1.3. АНАЛИЗ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В этом разделе мы будем рассматривать динамические системы без ограничения их свойств относительно уровня нелинейности.

Напомним некоторые варианты дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах.

Уравнение с разделенными переменными $\frac{dx}{dt} = -\frac{P(t)}{Q(x)}$, которое можно

записать в виде $P(t)dt + Q(x)dx = 0$, имеет общий интеграл $\int P(t)dt + \int Q(x)dx = C$.

Уравнение с разделяющимися переменными вида $P(t)R(x)dt + S(t)Q(x)dx = 0$ легко приводится к виду с разделенными переменными и интегрируется.

Уравнения, сводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными $dx/dt = \phi(at + bx + c)$. Заменой переменных $z = at + bx + c$ такие уравнения приводятся к виду уравнений с разделяющимися переменными.

Однородные уравнения. Уравнение общего вида $P(t, x)dt + S(t, x)dx = 0$ называется однородным, если при замене $t = ht$, $x = hx$ ($h \neq 0$ — произвольный множитель) уравнение не изменится. Введение новой искомой функции z с помощью замены $x = tz$ позволяет привести это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Обобщенные однородные уравнения. Уравнение общего вида $P(t, x)dt + Q(t, x)dx = 0$ называется обобщенным однородным, если при замене $t = ht$, $x = h^\alpha x$ ($h \neq 0$ — произвольный множитель, α — действительное число) уравнение не изменится. Введение новой искомой функции z с помощью замены $x = t^\alpha z$ позволяет привести это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Уравнения, сводящиеся к однородным уравнениям. Уравнения вида $\frac{dx}{dt} = \phi\left(\frac{At + Bx + C}{at + bx + c}\right)$, где A, B, C, a, b, c — действительные числа, сво-

дятся к однородным уравнениям. Если $\begin{vmatrix} A & B \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$, используется замена $\eta = At + Bx + C$, $\xi = at + bx + c$. Если $\begin{vmatrix} A & B \\ a & b \end{vmatrix} = 0$, замена $z = at + bx$

позволяет свести рассматриваемое уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Более подробную информацию о дифференциальных уравнениях, допускающих аналитическое отыскание решения, можно найти в справочниках [2.2; 2.3].

Модели, допускающие аналитическое решение, исторически являлись основными на первых этапах развития моделирования. Другие виды моделей не принимались во внимание из-за отсутствия методов их анализа. Ограниченность этого подхода проявилась, ко-

гда для ряда наблюдаемых явлений не удалось построить модели, отражающие эти явления и имеющие аналитическое решение. Стали использоваться модели, аналитическое решение которых не найдено; для них стали разрабатываться методы анализа, позволяющие без построения точного аналитического решения судить о свойствах исследуемого процесса. При этом может строиться приближенное решение, использоваться качественный анализ протекающего динамического процесса. В полной мере этот сценарий развития моделирования относится к учету нелинейных факторов в модели.

На первых этапах — линейное приближение, построение точных решений. В этих линейных моделях не отражаются многие наблюдаемые в реальных процессах и натурных экспериментах нелинейные эффекты. Происходит уточнение модели — квазилинейное приближение, построение приближенных решений, уточнение полученных ранее количественных результатов и получение новых качественных эффектов. На этом уровне моделирования обнаруживается, что модель отражает не все характерные свойства процесса. Существенно нелинейные эффекты не отражены в квазилинейных моделях.

Следующий этап моделирования — существенно нелинейные модели, их качественный анализ, численное исследование решений. Этот современный этап моделирования имеет свои особенности. Для моделей простых объектов (маятник, шарик в лунке, модели из других областей науки того же уровня сложности) вид нелинейных зависимостей и коэффициенты уравнений полностью и однозначно определены моделируемым объектом. При этом получено полное качественное и количественное совпадение результатов моделирования и наблюдаемых эффектов в реальных системах и натурных экспериментах. Для моделей более сложных систем, к которым относятся и динамические модели экономики, вид функциональных зависимостей и коэффициентов уравнений определяется гораздо сложнее. На первых этапах вид функциональных зависимостей назначался субъективно, на современном этапе при использовании для анализа модели численных методов функциональные зависимости можно учитывать в модели по данным реальных эконометрических исследований.

Будем исходить из того, что в общем случае построенная модель динамического процесса не будет содержать уравнений, интегрируемых в квадратурах.

На первом этапе исследования динамической модели, которая может быть существенно нелинейной, используется математический аппарат качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Он дает возможность проведения качественного исследования, определения особых точек на фазовой плоскости, анализа

характера траекторий вблизи особых точек. Эта важнейшая информация отражает качественные свойства системы. Естественное продолжение исследования — изучение количественных характеристик поведения системы. На этом этапе применяются либо приближенные методы анализа динамических моделей, либо численные методы. Во избежание терминологической путаницы (ведь численные методы тоже являются приближенными) уточним, что приближенными методами будем называть математические преобразования, позволяющие свести исходную задачу к решению более простой задачи. При этом переходе, как правило, снижается точность и, быть может, происходит потеря некоторых качественных результатов, присущих исходной модели, ограничение вида решения, которое, вообще говоря, можно найти приближенным методом. Более простая задача может иметь аналитическое решение, либо для отыскания ее решения при необходимости могут применяться численные методы.

Термин «численные методы», в отличие от термина «приближенные методы», соответствует применению численных методов для получения приближенного численного решения исходной задачи.

Мы рассмотрим некоторые приближенные методы исследования нелинейных задач динамики, позволяющие свести исходные задачи к анализу более простых математических моделей.

Выделяются два класса динамических эффектов: переходные процессы, сводящиеся к задаче с начальными условиями (задаче Коши) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, и циклические процессы, сводящиеся к отысканию периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Следствием качественного увеличения производительности вычислительной техники, снижения стоимости вычислений и повсеместной доступности вычислительных ресурсов явился тот факт, что для решения задачи Коши конкретной существенно нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно применять стандартные программы, реализующие тот или иной численный метод решения задачи с начальными условиями. При этом пользователь задает уровень допустимой погрешности и происходит автоматический выбор шага численного интегрирования для достижения заданной точности. Размерность решаемой системы может быть достаточно велика. Основная сложность в исследовании переходного процесса перенесена с отыскания решения задачи Коши на построение адекватной модели, определение функциональных зависимостей и коэффициентов. Естественно, существуют модели, для которых численное решение задачи Коши встречает определенные сложности. Это относится, например, к жестким системам, к необходимости построения решения с высокой точностью на большом временном промежутке. На современном уровне развития вы-

числительной техники и прикладного программного обеспечения для многих моделей динамики области, где возникают трудности в решении задачи Коши, находятся вне интересующего диапазона исследований. Анализ с помощью качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и численная реализация решения задачи Коши — наиболее разработанные инструменты исследования переходных процессов в существенно нелинейных моделях динамики.

Проблема построения периодических решений систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений принципиально отличается от решения задачи Коши. Если в линейной и квазилинейной формах моделей возможно аналитическое точное или приближенное построение периодических решений, то для построения периодических решений существенно нелинейных систем конструктивный конечный алгоритм не найден. Это является следствием сложных свойств системы, возможности существования нескольких устойчивых и неустойчивых периодических решений, возможности реализации странного аттрактора, детерминированного хаоса, бифуркаций решений при изменении параметра, эффектов теории катастроф.

Качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет исследовать фазовое пространство и дает возможность качественного анализа поведения системы. Количественное исследование периодических решений во многих случаях невозможно без активного участия человека.

Одной из возможных форм реализации исследований периодических процессов в существенно нелинейных динамических моделях является организация исследований в форме автоматизированной системы научных исследований. При этом исследователь определяет направления поиска решения и используемые алгоритмы, а компьютер реализует эти алгоритмы и отображает результаты решения. Многовариантный характер задачи и непредсказуемость результатов делают процесс поиска периодических решений, анализ их эволюции при изменении параметров системы увлекательным процессом, по сценарию похожим на сложную компьютерную игру.

2.1.4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

Динамические модели на основе обыкновенных дифференциальных уравнений включают постановку двух типов задач — задачи Коши и задачи об отыскании периодических решений.

Задача Коши, используемая для моделирования переходных процессов, формулируется следующим образом: задается система n обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}\frac{dx_k(t)}{dt} &= f_k([t], x_1, \dots, x_n), \\ k &= 1, \dots, n,\end{aligned}\tag{2.1.4.1}$$

и n начальных условий при $t = t_0$:

$$\begin{aligned}x_k(t_0) &= \xi_k, \\ k &= 1, \dots, n.\end{aligned}\tag{2.1.4.2}$$

Квадратными скобками обозначен тот факт, что правые части системы (2.1.4.1) могут зависеть от времени t явным образом, а могут и не зависеть. Ставится задача отыскания решения системы (2.1.4.1) с начальными условиями (2.1.4.2).

Задача о поиске периодического решения формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{dx_k(t)}{dt} &= f_k([t], x_1, \dots, x_n), \\ k &= 1, \dots, n.\end{aligned}\tag{2.1.4.3}$$

При этом, если правая часть системы (2.1.4.3) зависит от времени t , то эта зависимость периодическая с известным периодом T :

$$\begin{aligned}f_k(t, x_1, \dots, x_n) &= f_k(t + T, x_1, \dots, x_n), \\ k &= 1, \dots, n.\end{aligned}\tag{2.1.4.4}$$

Ставится задача отыскания периодических решений как с периодом T , так и с периодом mT (субгармонические решения порядка m , где m — фиксированное число): $x_k(t) = x_k(t + mT)$, $k = 1, \dots, n$.

Если правые части системы (2.1.4.3) не зависят от времени (автономные системы, период решения неизвестен), ставится задача отыскания и периодического решения и его периода T .

Рассмотрим численные методы решения задачи Коши (2.1.4.1), (2.1.4.2). Получили распространение одношаговые и многошаговые методы, явные и неявные разностные схемы. Последние применяются для решения так называемых жестких, или сингулярно-возмущенных задач. Такие задачи характеризуются малостью старшей производной в модели по сравнению с остальными компонентами. Выбор численного алгоритма определяется видом системы уравнений, требуемой точностью решения, вычислительными ресурсами. По мере роста производительности и снижения стоимости компьютерной техники ограничения по вычислительным ресурсам посто-

янно ослабевают. Давно разработанные, отлаженные и апробированные алгоритмы, как правило, легко переносятся на новые поколения вычислительной техники и программного обеспечения. Во многих случаях алгоритмы численного решения задачи Коши включаются в общенаучное программное обеспечение. Например, в пакет *Mathcad* включены программные средства решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а также для жестких систем.

При численном решении задачи Коши (2.1.4.1), (2.1.4.2), определенной в условиях непрерывного времени t , значения приближенного решения вычисляются в дискретные моменты времени $t_0, t_1, t_2, \dots$. При этом

$$t_i = t_{i-1} + h_i \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.1.4.5)$$

Отрезки времени h_i между соседними точками, в которых вычисляется решение, называются шагом численного решения задачи Коши, или шагом численного интегрирования. В некоторых вычислительных алгоритмах этот шаг может быть постоянным, не зависящим от индекса i : $h_i = h = \text{const}$. В других вариантах реализации численного метода величина шага является переменной и выбирается из условия соблюдения требуемой точности приближенного решения. Естественно, при этом может возникнуть вычислительный конфликт между заданной высокой точностью решения, величиной шага и возможностями вычислительной техники. Такого рода противоречие разрешается пользователем путем обоснованного выбора этих взаимозависимых характеристик приближенного решения.

Одношаговые методы численного решения задачи Коши для системы (2.1.4.1) с начальными условиями (2.1.4.2) характеризуются тем, что приближенные значения x_i в каждый момент времени t_i вычисляются только по значениям приближенного решения x_{i-1} в предшествующий момент времени t_{i-1} . При этом легко реализуется алгоритм с переменным шагом.

Одним из критериев эффективности численного метода является оценка локальных погрешностей, т.е. оценка величин $\delta_i = |x(t_{i+1}) - x_{i+1}|$ ($k = 1, 2, \dots$). Здесь $x(t_{i+1})$ — точное значение решения задачи Коши для системы (2.1.4.1) с начальными условиями (2.1.4.2) в точке $t = t_{i+1}$, x_{i+1} — значение приближенного решения, вычисленное в этой точке. Обычно для численных методов оценивается порядок локальной погрешности относительно шага интегрирования h . Метод численного интегрирования имеет порядок r , если на всем интервале времени численного интегрирования выполняется условие $\delta_i \leq Rh^{r+1}$, где постоянная R не зависит от шага h .

Приведем некоторые вычислительные процедуры для решения задачи Коши для системы (2.1.4.1) с начальными условиями (2.1.4.2) в случае одного уравнения с одним начальным условием ($k = 1$).

Метод Эйлера – простейший одношаговый метод задается следующим вычислительным алгоритмом:

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i), i = 1, 2, \dots \quad (2.1.4.6)$$

Этот метод является методом первого порядка.

Метод Эйлера–Коши с итерациями. Приближенное решение $x_{i+1} = x_{i+1}^{(m)}$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{i+1}^{(j)} &= x_i + \frac{h}{2} [f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, x_{i+1}^{(j-1)})], \\ j &= 1, 2, \dots, m; \\ x_{i+1}^{(0)} &= x_i + hf(t_i, x_i) \end{aligned} \quad (2.1.4.7)$$

Число требуемых итераций m выбирается из условия близости величин $x_{i+1}^{(m)}$ и $x_{i+1}^{(m-1)}$. Если за несколько итераций эти величины не совпадают с заданным уровнем точности, то шаг численного интегрирования h уменьшается в два раза.

Метод Эйлера–Коши с итерациями относится к методам второго порядка.

Большое распространение получили одношаговые методы численного интегрирования Рунге–Кутты различных порядков точности. Алгоритмы, соответствующие этим методам, в общем виде записываются следующим образом:

$$x_{i+1} = x_i + hF(f, h, t_i, x_i), i = 1, 2, \dots \quad (2.1.4.8)$$

Функция F соответствует правой части системы (2.1.4.1).

Метод Рунге–Кутта первого порядка точности совпадает с методом Эйлера.

Метод Рунге–Кутта второго порядка точности определяется следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{2} [f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, x_i + f(t_i, x_i))], \\ i &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.1.4.9)$$

или

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \left[\frac{1}{4} f(t_i, x_i) + \frac{3}{4} f(t_i + \frac{2}{3}h, x_i + \frac{2}{3}f(t_i, x_i)) \right], \\ i &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.1.4.10)$$

Метод Рунге — Кутты третьего порядка точности задается формулами

$$\begin{aligned}
 x_{i+1} = & x_i + \frac{h}{6} \left[f(t_i, x_i) + 4f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{1}{2}f(t_i, x_i)\right) + \right. \\
 & \left. + f(t_{i+1}, x_i - f(t_i, x_i) + 2f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{1}{2}f(t_i, x_i)\right)) \right], \\
 i = & 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.1.4.11}$$

или

$$\begin{aligned}
 x_{i+1} = & x_i + \frac{h}{9} \left[2f(t_i, x_i) + 3f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{1}{2}f(t_i, x_i)\right) + \right. \\
 & \left. + 4f\left(t_i + \frac{3}{4}h, x_i + \frac{3}{4}f\left[t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{1}{2}f(t_i, x_i)\right]\right) \right], \\
 i = & 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.1.4.12}$$

Алгоритм *метода Рунге — Кутты четвертого порядка точности* строится в соответствии со следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 x_{i+1} = & x_i + \frac{h}{6} \left[f(t_i, x_i) + 2f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{1}{2}f(t_i, x_i)\right) + \right. \\
 & \left. + 2f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{1}{2}f(t_i, x_i)\right)\right) + \right. \\
 & \left. + f\left(t_{i+1}, x_i + f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{1}{2}f(t_i, x_i)\right)\right)\right) \right], \\
 i = & 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.1.4.13}$$

Существуют методы Рунге — Кутты более высоких порядков. Наибольшее распространение получили методы до 5-го порядка включительно. Ранее это объяснялось резким возрастанием количества вычислительных операций по мере роста порядка метода Рунге — Кутты. В современных условиях этот фактор не является определяющим. Схемы метода Рунге—Кутты 4—5-го порядка точности в подавляющем большинстве случаев позволяют достичь приемлемую точность интегрирования для нежестких задач.

Приведенные формулы численного решения задачи Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка распространяются на системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Заметим, что обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n может быть сведено к сис-

теме n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка каждое.

Существует класс уравнений, называемых жесткими, или сингулярно-возмущенными, для которых решение с помощью одношаговых методов типа Рунге—Кутта приводит к очень быстрому накоплению недопустимо большой погрешности. Такого рода уравнения возникают при наличии малого параметра при старшей производной. Для решения задачи Коши для таких уравнений используются многошаговые явные и неявные разностные схемы. Эти методы более требовательны к параметрам вычислительной техники. Естественно, с помощью этих методов можно решать и нежесткие задачи. В последние годы в связи с ростом вычислительных ресурсов наблюдается тенденция применения алгоритмов, ориентированных на решение жестких задач, ко всем задачам, в том числе и тем, которые можно решать и методами типа Рунге — Кутта.

В распространенных математических пакетах, например в *Mathcad*, присутствуют функции для решения задачи Коши, реализующие метод Рунге—Кутта как с фиксированным, так и с переменным шагом. Для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений включены другие алгоритмы, реализующие численные методы построения решения задачи Коши для таких систем.

Применение численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений требует взвешенного выбора варианта численного метода, шага численного интегрирования в зависимости от требуемой точности расчетов и отрезка времени, на котором строится численное решение. Для контроля алгоритма и программной реализации можно использовать тестовые расчеты с повторением задач, имеющих аналитическое решение. При этом количественно определяется погрешность, вносимая методом решения. Для контроля результатов решения задач, для которых точное аналитическое решение не найдено, можно использовать варианты алгоритмов с автоматическим выбором шага численного интегрирования, проверять построенные численные решения с помощью повторного расчета с меньшим шагом интегрирования, проводить расчеты с большим количеством значащих цифр.

Таким образом, можно считать, что проблема численного построения решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений сведена к стандартным программам. В принципе алгоритм построения решения такой задачи является конечным.

Вторая классическая задача для систем обыкновенных дифференциальных уравнений — задача поиска периодического решения. Для этой задачи не найдено конечных алгоритмов, гарантированно приводящих к построению периодического решения с заданной точ-

ностью. Это является следствием сложности объекта моделирования. Ведь в существенно нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений могут при одинаковых наборах параметров существовать различные устойчивые и неустойчивые периодические решения, может реализовываться вариант отсутствия устойчивых периодических решений, весь широкий спектр других эффектов, присущих существенно нелинейным динамическим системам. Трудности отыскания периодических решений соответствуют сложному многовариантному характеру периодических движений в таких системах. Алгоритм решения такой задачи является многовариантным, и наиболее естественная форма организации таких исследований — интерактивная с возможным участием исследователя.

Численные методы решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений могут использоваться и для поиска периодических решений диссипативных систем. Для таких систем влияние произвольных начальных условий со временем убывает и процедура численного интегрирования может приблизиться к одному из возможных устойчивых периодических решений. При этом приходится проводить численное интегрирование на большом временном промежутке, включающем несколько предполагаемых периодов решения. Для анализа промежуточных и итоговых результатов удобно использовать средства машинной графики. Такой подход может применяться в выборочном анализе поведения динамических систем.

ГЛАВА 2.2. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

2.2.1. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ

Методы, основанные на сведении решения системы дифференциальных (и интегральных) уравнений к решению системы алгебраических уравнений, называются прямыми. Область их применения весьма широка. Такие методы давно и широко применяются для решения задач, описываемых обыкновенными дифференциальными и интегродифференциальными уравнениями, уравнениями в частных производных, вариационных задач. Мы ограничимся применением прямых методов к отысканию периодических решений рассматриваемого класса задач, основанных на системах обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений.

Одним из наиболее распространенных прямых методов является метод Бубнова — Галеркина (в некоторых источниках этот метод называется методом Галеркина).

И. Г. Бубнов (1872—1919) в своих работах обсуждал использование этого метода в 1913 г., а в трудах академика Б. Г. Галеркина (1871—1945) этот метод упоминается и развивается с 1915 г.

Задачи, решаемые с помощью этого метода, разнообразны: он может быть использован как приближенный метод для решения линейных и нелинейных задач, в том числе и для систем, включающих дифференциальные уравнения в частных производных. В последнем случае с помощью метода Бубнова — Галеркина задача может быть сведена к анализу системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Искомое решение представляется в виде линейной комбинации линейно независимых функций, называемых базисными. Эти функции должны удовлетворять всем условиям на границах интервала. В случае отыскания периодического решения эти функции должны быть периодичны с периодом искомого решения. Как правило, систему базисных функций выбирают из дополнительных соображений, определяемых смыслом задачи, или по критерию удобства представления и интерпретации результатов расчетов. При анализе периодических процессов в качестве базисных функций часто используют компоненты ряда Фурье.

Метод Бубнова—Галеркина применяется для построения периодических решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [2.4, 2.5, 2.6], при этом получены важные количе-

ственные и качественные результаты, отражающие ряд существенно нелинейных эффектов [2.4].

Рассмотрим применение метода Бубнова — Галеркина для отыскания периодических решений существенно нелинейных систем.

Модель включает систему нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k(t, x_1, \dots, x_n), k = 1, \dots, n, \quad (2.2.1.1)$$

причем правые части системы периодичны с известным периодом T , т.е.

$$f_k(t, x_1, \dots, x_n) = f_k(t + T, x_1, \dots, x_n), k = 1, \dots, n. \quad (2.2.1.2)$$

Выберем некоторую полную на отрезке $[0, T]$ систему непрерывных линейно независимых функций $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots$

Система функций $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots$ называется ортогональной, если выполняются соотношения

$$\int_0^T \psi_i(t) \psi_j(t) dt = 0 \quad (i \neq j). \quad (2.2.1.3)$$

Эта система называется ортонормированной, если кроме условий ортогональности (2.2.1.3) выполняются условия нормировки

$$\frac{1}{T} \int_0^T \psi_i^2(t) dt = 1 \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (2.2.1.4)$$

Ортогональная система функций называется полной, если кроме функции, тождественно равной нулю, не существует непрерывной функции, которая на отрезке $[0, T]$ была бы ортогональной всем функциям системы.

Ортогональная система функций называется замкнутой, если любую функцию можно с назначенной заранее точностью аппроксимировать в виде линейной комбинации функций из ортогональной системы.

Тригонометрическая система функций $1, \sin(t), \cos(t), \sin(2t), \cos(2t), \dots, \sin(nt), \cos(nt) \dots$ является полной и замкнутой, т.е. любую периодическую интегрируемую с квадратом функцию можно с достаточной точностью приблизить отрезком ряда Фурье. Кроме того, ряд Фурье T -периодической интегрируемой с квадратом функции можно интегрировать почленно. Если две T -периодические функции, интегрируемые с квадратом, имеют одинаковые ряды Фурье, то

эти функции совпадают на отрезке $[0, T]$, за исключением, быть может, конечного числа точек.

Эти свойства делают тригонометрическую систему функций очень удобной, чтобы именно эту систему выбрать в качестве базисных функций метода Бубнова — Галеркина при отыскании периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Перепишем систему (2.2.1.1) в виде эквивалентного этой системе дифференциального уравнения порядка n :

$$\begin{aligned} \frac{d^n x(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + b_{n-2} \frac{d^{n-2} x(t)}{dt^{n-2}} + \dots \\ + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 - F(t, x(t)) = 0. \end{aligned} \quad (2.2.1.5)$$

Здесь коэффициенты b_i и функция $F(t, x(t))$ определяются при переходе от системы вида (2.2.1.1) к уравнению (2.2.1.5) и считаются известными.

Приближенное решение уравнения (2.2.1.5) будем искать в виде

$$x_m(t) \approx \sum_{i=1}^m a_i \Psi_i(t). \quad (2.2.1.6)$$

Подставим приближенное решение (2.2.1.6) в уравнение (2.2.1.5). При этом правая часть полученного выражения не будет тождественным нулем, так как (2.2.1.6) не является точным решением уравнения (2.2.1.5). Это отличие правой части (2.2.1.5) от нуля при подстановке приближенного решения называется невязкой $N(t, x_m)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^n x_m(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} x_m(t)}{dt^{n-1}} + b_{n-2} \frac{d^{n-2} x_m(t)}{dt^{n-2}} + \dots \\ + b_1 \frac{dx_m(t)}{dt} + b_0 - F(t, x_m(t)) = N(t, x_m(t)). \end{aligned} \quad (2.2.1.7)$$

Согласно методу Бубнова—Галеркина коэффициенты a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) разложения (2.2.1.6) определяются из условия ортогональности невязки всем базисным функциям $\psi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Это условие записывается следующим образом:

$$\int_0^T N(t, x_m(t)) \Psi_i(t) dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.2.1.8)$$

Принимая во внимание выражения для невязки (2.2.1.7), аппроксимацию (2.2.1.6), можно видеть, что (2.2.1.8) представляет собой систему m алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения a_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Эта система в общем случае является нелинейной; число ее действительных решений неизвестно. Не существует конечного алгоритма решения таких систем, с помощью которого можно было бы получить заведомо все решения с заданной точностью. Этот факт является отражением сложного характера возможных решений исходной системы (2.2.1.1). Трудности поиска решений перенесены на другой этап исследований.

Возникает естественный вопрос: а зачем использовать метод Бубнова–Галеркина, если он не позволяет принципиально снизить трудности в поиске решения? Ответ на этот вопрос состоит из двух аспектов.

1) в исходной системе (2.2.1.1) искомыми величинами являются неизвестные функции времени t . В системе алгебраических уравнений (2.2.1.8) неизвестными являются не функции, а числа — намного более простой объект;

2) трудности поиска решения являются объективным отражением нелинейных свойств моделируемой системы. Исходная модель (2.2.1.1) учитывает эти нелинейные свойства. Тот факт, что после применения приближенного метода трудности поиска решения изменили свою форму, но остались в алгоритме поиска решения, отражает то, что приближенное решение, если оно будет найдено, возможно, будет отражать нелинейные свойства исходной моделируемой системы.

Остается вопрос о количестве слагаемых в аппроксимации (2.2.1.6), обеспечивающих необходимую точность решения. В общем случае может использоваться прием исследования практической сходимости ряда (2.2.1.6), когда увеличение количества слагаемых ряда не дает не только качественных, но и значимых количественных изменений в приближенном решении. Этот прием не дает гарантий достижения приближенным решением заданной точности. В случае применения метода Бубнова — Галеркина для отыскания периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений и использования в качестве базисных функций системы тригонометрических функций существует теорема Урабе [2.5]. При выполнении условий этой теоремы существуют приближения метода Бубнова–Галеркина, близкие к точному периодическому решению. Подробно этот вопрос излагается в монографии [2.4].

Приведем пример решения задачи с помощью метода Бубнова–Галеркина. В качестве модели примем уравнение (2.1.2.20), периодические решения которого уже найдены с помощью резонансного варианта метода малого параметра и с помощью метода осреднения.

Результаты решения этими двумя методами совпали. При применении метода Бубнова — Галеркина запишем уравнение (2.1.2.20) в виде

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) - \mu W \sin(\omega t) - \mu \gamma x^3(t) = \zeta \quad (2.2.1.9)$$

Решение уравнения (2.2.1.9) будем искать в виде короткого отрезка ряда Фурье

$$x(t) = B \sin(\omega t). \quad (2.2.1.10)$$

В данном варианте единственной базисной функцией является $\sin(\omega t)$, единственный искомый коэффициент B , период системы и решения $T = 2\pi/\omega$.

Подставляем вид решения (2.2.1.10) в уравнение (2.2.1.9) и определяем невязку:

$$N(t, B \sin(\omega t)) = -\omega^2 B \sin(\omega t) + \omega_0^2 B \sin(\omega t) - \mu W \sin(\omega t) - \mu \gamma (B \sin(\omega t))^3. \quad (2.2.1.11)$$

С учетом введенных ранее обозначений для расстройки χ (2.1.2.21) $\omega_0^2 - \omega^2 = \mu \chi$, выражение для невязки принимает следующий вид:

$$N(t, B \sin(\omega t)) = \mu \chi B \sin(\omega t) - \mu W \sin(\omega t) - \mu \gamma (B \sin(\omega t))^3. \quad (2.2.1.12)$$

Для определения коэффициента B записываем условие ортогональности невязки координатной функции:

$$\int_0^T [\mu \chi B \sin(\omega t) - \mu W \sin(\omega t) - \mu \gamma (B \sin(\omega t))^3] \sin(\omega t) dt = 0. \quad (2.2.1.13)$$

$$\text{Вычисляя интегралы } \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}, \quad \int_0^{2\pi/\omega} \sin^4(\omega t) dt = \frac{3}{8}, \text{ получа-}$$

ем уравнение для определения коэффициента B :

$$\frac{1}{2} \chi B - \frac{1}{2} W - \frac{3}{8} \gamma B^3 = 0. \quad (2.2.1.14)$$

Сравнивая это уравнение с уравнениями, полученными с использованием резонансного варианта метода малого параметра и метода осреднения, констатируем, что метод Бубнова — Галеркина привел к тому же результату. Но последний метод не использует концепции малого параметра.

Все три эквивалентных уравнения для определения амплитуды колебаний B , полученные различными методами, являются кубическими уравнениями и имеют аналитическое решение.

Возможность аналитического решения является редким случаем — как правило, алгебраические системы нелинейных уравнений для определения коэффициентов разложения не имеют аналитического решения. В этих случаях используются приближенные методы решения подобных систем. Кроме метода Бубнова — Галеркина, к прямым методам можно отнести метод Рунге, метод наименьших квадратов, метод конечных разностей [2.7], метод Канторовича [2.8]. Все они приводят решение задачи к системе алгебраических уравнений. В случае нелинейной исходной задачи получаемая система алгебраических уравнений также нелинейна. По-видимому, наиболее эффективным методом решения подобных систем является метод Ньютона.

Метод Ньютона для решения нелинейных систем алгебраических уравнений заключается в следующем. Рассматривается система n алгебраических уравнений относительно n неизвестных $z_1, z_2, \dots, z_n$ вида

$$F_i(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2.1.15)$$

где F_i — известные дважды дифференцируемые функции своих переменных.

Последующее $(k+1)$ приближение $z_1^{(k+1)}, z_2^{(k+1)}, \dots, z_n^{(k+1)}$, определяется по предыдущему, k -приближению $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}$ как решение линейной системы алгебраических уравнений относительно $z_1^{(k+1)}, z_2^{(k+1)}, \dots, z_n^{(k+1)}$:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i(z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \dots, z_n^{(k)})}{\partial z_j} (z_j^{(k+1)} - z_j^{(k)}) = -F_i(z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}), \quad (2.2.1.16)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

При этом считается, что якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial z_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Нулевое или стартовое приближение метода определяется исследователем. В общем случае метод Ньютона не дает никаких гарантий определения всех действительных корней, сходимость может зави-

сеть от стартового приближения, возможны ситуации заклинивания алгоритма. Тем не менее этот метод является наиболее эффективным для решения систем нелинейных алгебраических уравнений.

Приведем некоторые вычислительные ситуации, возможные при реализации метода Ньютона. Чтобы иметь возможность графически изобразить результаты, рассмотрим простейший вариант $n = 1$. При этом система сводится к одному нелинейному алгебраическому уравнению $F(z) = 0$, $(k + 1)$ приближение определяется по формуле

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} - \frac{F(z^{(k)})}{\frac{dF(z^{(k)})}{dz}}.$$

Эта формула имеет простую геометрическую интерпретацию. Очередное приближение строится по предыдущему приближению следующим образом. В точке z , соответствующей предыдущему приближению, к кривой $F(z)$ проводится касательная. Точка пересечения этой касательной с осью z является координатой точки следующего приближения.

Все ситуации будем иллюстрировать на примере одной и той же функции $F(z)$, имеющей на интервале наблюдения один действительный корень (рис. 2.2.1.1 – 2.2.1.4). Во всех приводимых примерах пунктирной кривой изображены касательные линии к кривой $F(z)$ в точке очередного приближения.

Ситуация 1 (рис. 2.2.1.1). Итерационный процесс метода Ньютона сходится к корню. Выбираем стартовое приближение $z^{(0)}$, проводим касательную, определяем точку $z^{(1)}$ пересечения касательной с осью z , проводим следующую касательную к кривой $F(z)$ в точке $z^{(1)}$, находим точку $z^{(2)}$ пересечения этой касательной с осью z и т.д. На рисунке видно, что процесс сходится к корню.

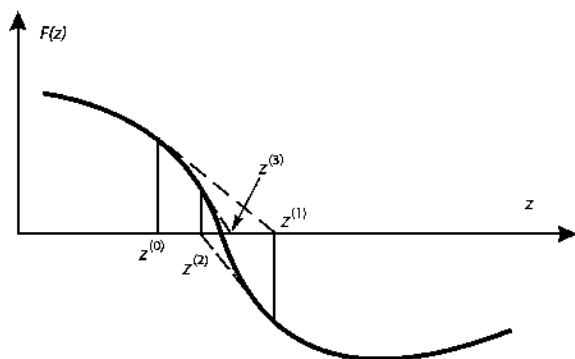


Рис. 2.2.1.1. Метод Ньютона сходится к корню

Ситуация 2 (рис. 2.2.1.2). Итерационный процесс метода Ньютона закичивается. Стартовое или очередное приближение оказывается в точке, обозначенной $z^{(k)}$ на рис. 2.2.1.2. Касательная в этой точке к функции $F(z)$ пересекает ось z в точке $z^{(k+1)}$. В свою очередь, касательная к функции $F(z)$ в точке $z^{(k+1)}$ пересекает ось z вблизи точки $z^{(k)}$, так что точки $z^{(k+2)}$ и $z^{(k)}$ оказываются очень близки. Итерационный процесс может закичиться.

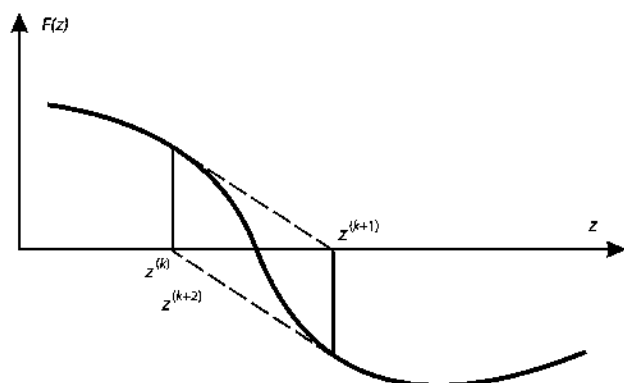


Рис. 2.2.1.2. Итерационный процесс метода Ньютона закичился

Ситуация 3 (рис. 2.2.1.3). Итерационный процесс метода Ньютона резко расходится. Предположим, что очередное приближение $z^{(k+1)}$ попало в точку, где производная к функции $F(z)$ близка к нулю. Следовательно, касательная к функции $F(z)$ в этой точке почти горизонтальна и точка ее пересечения с осью z будет достаточно далека от текущих приближений.

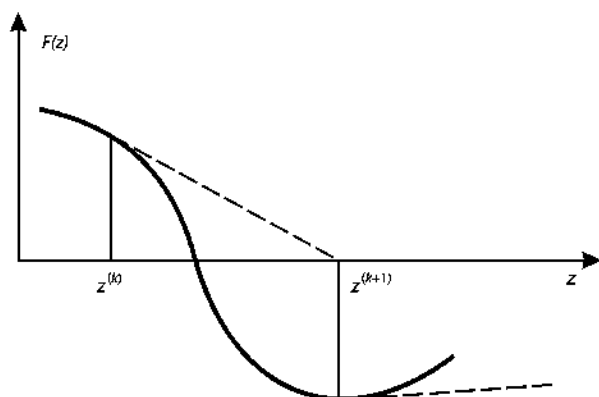


Рис. 2.2.1.3. Итерационный процесс метода Ньютона резко расходится

Ситуация 4 (рис. 2.2.1.4). Итерационный процесс метода Ньютона постепенно расходится. Очередные приближения $z^{(k+1)}$ попадают в точки, все более удаленные от корня.

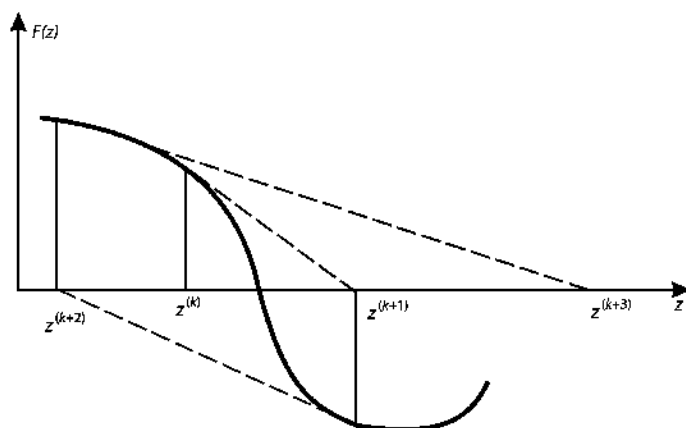


Рис. 2.2.1.4. Итерационный процесс метода Ньютона постепенно расходится

Разработанный в конце XVII в., т.е. за 250 лет до появления первых компьютеров, метод Ньютона хорошо зарекомендовал себя при численном решении разнообразных нелинейных задач. Относительно сходимости этого метода авторы [2.9] отмечают, что бытует мнение, что модифицированные ньютоновские алгоритмы работают хорошо лишь вблизи решения. Оно породило массу гибридных схем, в которых на начальных итерациях, пока текущая точка далека от оптимальной, используется какой-нибудь относительно грубый алгоритм, а алгоритм ньютоновского типа включается на завершающей стадии счета. Объективных мотивов для такой гибридизации нет. Хорошо продуманный и тщательно реализованный метод ньютоновского типа будет эффективен и вдали от искомого решения.

Отметим проблему исследования эволюции периодических решений в окрестности точки бифуркации. Академик Н.Н. Моисеев в послесловии к монографии [2.10] пишет: «Важнейшим инструментом исследования зависимости структурных решений от параметра являются методы продолжения по параметру, которые опираются на численные методы решения задачи Коши. Однако эти методы перестают действовать в окрестности точки бифуркации, поскольку в этой точке происходит нарушение единственности. Значит, постбифуркационный анализ нужно начинать с создания численного метода, позволяющего найти все действительные решения, выходящие из точки бифуркации. Но именно здесь нас подстерегает главная трудность.

Более трехсот лет тому назад Ньютон разработал метод, получивший впоследствии название «диаграммы Ньютона», который позволяет найти все решения уравнения $X(x, \lambda) = 0$ при условии, что $X(0, 0) = 0$, а сама функция — аналитическая функция своих переменных. Метод диаграммы Ньютона и в настоящее время является единственным способом, позволяющим построить эффективные численные методы определения всех решений этой задачи. Численные реализации метода Ньютона отработаны лишь для скалярного случая, когда переменные x и λ — скаляры. Случай, когда размерность переменной x велика, приводит уже к огромным вычислительным трудностям. Если же размерность переменной λ больше единицы, то способы численной реализации идей Ньютона неизвестны. Таким образом, разработка численных методов постбифуркационного анализа — это сейчас одна из важнейших задач вычислительной математики, от решения которой будет зависеть судьба многочисленных прикладных исследований».

Одним из способов преодоления отмеченных Н.Н. Моисеевым трудностей является интерактивный режим организации процесса моделирования, когда знания, опыт, интуиция пользователя, подкрепленные программными средствами, позволяют анализировать поведение исследуемых систем в окрестности точки бифуркации.

2.2.2. МЕТОД ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И СТРОБОСКОПИЧЕСКИЙ МЕТОД

Идея метода точечных отображений была использована А. Пуанкаре [2.11], а впоследствии значительно развита Дж. Биркгоффом, А.А. Андроновым, А.А. Виттом [2.12], Ю.И. Неймарком [2.13]. Эта идея является одной из фундаментальных идей теории дифференциальных уравнений. Что особенно важно, эта идея является весьма продуктивной, так как с помощью метода точечных отображений решены многие нелинейные динамические задачи.

Основой метода точечных отображений является идея преобразования некоторого геометрического образа в себя. При этом вводится понятие либо секущей поверхности, либо оператора сдвига.

Секущая поверхность S рассматривается в фазовом пространстве. Считается, что эта поверхность гладкая и пересекается фазовыми траекториями без касания. Размерность этой поверхности меньше размерности фазового пространства. Рассмотрим на этой поверхности некоторую точку M , через которую поверхность пересекает фазовая траектория. Проследим движение точки по этой фазовой траектории с ростом времени t . Может получиться так, что фазовая траектория никогда больше не пересечет секущую поверхность; в этом случае говорят, что точка M не имеет последующей. Но может

получиться и так, что через некоторое время фазовая траектория снова пересечет секущую поверхность S в точке M_1 . В этом случае точка M_1 называется последующей для точки M . Преобразование, устанавливающее однозначное соответствие между всеми точками поверхности S и их последующими, называется точечным отображением поверхности S в себя. Это преобразование записывается следующим образом: $M_1 = \hat{T}M$, где $\hat{T}$ — оператор точечного отображения.

Если точка M отображается сама в себя, т.е. $M = \hat{T}M$, то такая точка называется неподвижной. Неподвижным точкам соответствуют замкнутые фазовые траектории, которые, в свою очередь, соответствуют периодическим решениям. Очевидно, что может возникнуть более сложная ситуация, когда точка отобразится сама в себя не сразу, а в соответствии с законом $M = \hat{T}^n M$, $M \neq \hat{T}^k M$, $k < n$. Такая точка называется n -кратной неподвижной, ей также соответствуют замкнутые траектории и периодические решения, но с периодом, в n раз большим времени, соответствующего действию оператора $\hat{T}$. Предельные циклы системы соответствуют неподвижным точкам точечного отображения.

С помощью точечного отображения можно судить об устойчивости предельных циклов. Пусть периодическому решению и его предельному циклу соответствует n -кратная неподвижная точка M^* . В окрестности этой точки рассмотрим точку M_0 и применим к ней оператор точечного отображения $\hat{T}^n$. В результате мы перейдем в точку M_1 : $M_1 = \hat{T}^n M_0$. К точке M_1 снова применим оператор $\hat{T}^n$: $M_2 = \hat{T}^n M_1$, получим точку M_2 , и так далее. Если предельный цикл является асимптотически устойчивым, то $\lim_{i \rightarrow \infty} M_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \hat{T}^{ni} M_0 = M^*$.

И наоборот, если это условие выполняется для любой точки M_0 , близкой к точке M^* , то соответствующее периодическое решение устойчиво. При компьютерной реализации это свойство является способом проверки устойчивости периодического решения на конструктивном уровне строгости.

В частном случае систем второго порядка секущей поверхностью является плоская кривая на фазовой плоскости; положение точки на этой кривой определяется единственной координатой s , например длиной отрезка кривой, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки. Координата последующей точки s_{Π} является функцией от координаты исходной точки. Для неподвижной точки s^* выполняется условие:

$\left| \frac{ds_{\Pi}}{ds} \right|_{s=s^*} < 1$. Если это условие не выполняется, то неподвижная точка, соответствующий ей предельный цикл и периодическое решение неустойчивы.

Метод точечных отображений получил существенное развитие для анализа нелинейных динамических систем. Наряду с аналитическими методами и подходами, основанными на теории возмущений, метод точечных отображений получил свое продолжение в методе припасовывания (сшивания), применявшемся при исследовании кусочно-линейных систем.

Метод точечных отображений можно рассматривать и с использованием концепции оператора сдвига. При исследовании периодических решений этот подход может быть более конструктивным.

Пусть система обыкновенных дифференциальных уравнений является математической моделью динамической системы. Решения системы дифференциальных уравнений определяют закон изменения искомой переменной $x(t)$. Считается, что начальные условия при $t = t_0$ однозначно определяют для всех значений t решение $x(t)$. Точка x_0 , двигаясь по траекториям исходной системы, через время T перейдет в точку x_1 . Оператор перехода $\hat{T}_T$ от точки x_0 в момент времени t_0 к точке x_1 в момент времени $t_0 + T$ называется оператором сдвига по траекториям системы: $x_1 = \hat{T}_T x_0$. Очевидны свойства этого оператора: $\hat{T}_{t_1} \hat{T}_{t_2} = \hat{T}_{t_1+t_2}$, $\hat{T}_0 x = x$.

Отображением сдвига называется точечное отображение, которое каждой точке фазового пространства ставит в соответствие точку, в которую она перейдет в соответствии с решением исходной системы дифференциальных уравнений за время T . Операторы сдвига $\hat{T}_T$ для всех T полностью определяют фазовые траектории системы.

Если исходная система T -периодическая, то периодическим решениям такой системы соответствуют неподвижные точки точечного отображения. Для того чтобы решение $x(t)$ было T -периодическим, т.е. $x(t) = x(t + T)$, необходимо и достаточно, чтобы точка x_0 была неподвижной точкой оператора $\hat{T}_T$, т.е. $\hat{T}_T x_0 = x_0$.

Оператор сдвига $\hat{T}_T$ реализует преобразование гиперплоскости $t = t_0$ в гиперплоскость $t = t_0 + T$. Применим этот оператор последовательно два раза (обозначается это как $\hat{T}_T^2$). Тогда придем к точке $x_2 = \hat{T}_T x_1 = \hat{T}_T (\hat{T}_T x_0) = \hat{T}_T^2 x_0$. Если точка x_2 совпадает с точкой x_0 , но эти две совпадающие точки не совпадают с точкой x_1 , то периодическое решение исходной системы является $2T$ -периодическим. Колебания, соответствующие таким решениям, называются субгармоническими порядка $1/2$. Обобщая эту процедуру, будем говорить о субгармонических колебаниях порядка $1/n$, которым соответствуют неподвижные точки оператора $\hat{T}_T^n$, т.е. $x_0 = \hat{T}_T^n x_0$. При этом период решения nT является наименьшим, т.е. неподвижные точки оператора $\hat{T}_T^n$ не совпадают с неподвижными точками операторов $\hat{T}_T^{n-1}, \hat{T}_T^{n-2}, \dots, \hat{T}_T$. При этом кроме x_0 неподвижными точками операторов

ра сдвига $\hat{T}_T^n$ являются точки $\hat{T}_T^{n-1}x_0, \hat{T}_T^{n-2}x_0, \dots, \hat{T}_T x_0$. В случае $n = 2$ обсуждаемая ситуация иллюстрируется рис. 2.2.2.1 и 2.2.2.2. Функции исходной системы имеют период T (тонкие линии меньшей амплитуды), решение имеет период $2T$ (толстые линии большей амплитуды). Неподвижными являются точки при $t = 0$ и $t = T$ (и совпадающие с ними на фазовой плоскости). На фазовой плоскости один оборот по траектории решения соответствует двум оборотам по траектории функций системы.

Стробоскопический метод основан на близких к методу точечных отображений идеях. Предполагается, что исследуется T -периодический процесс или процесс, близкий к T -периодическому. Этот процесс наблюдается в фазовом пространстве в «стробоскопическом освещении», т.е. регистрируется состояние системы в моменты времени $T, 2T, 3T, \dots$. Отметим простоту компьютерной реализации этого метода. Для строго периодического процесса наблюдаемая фазо-

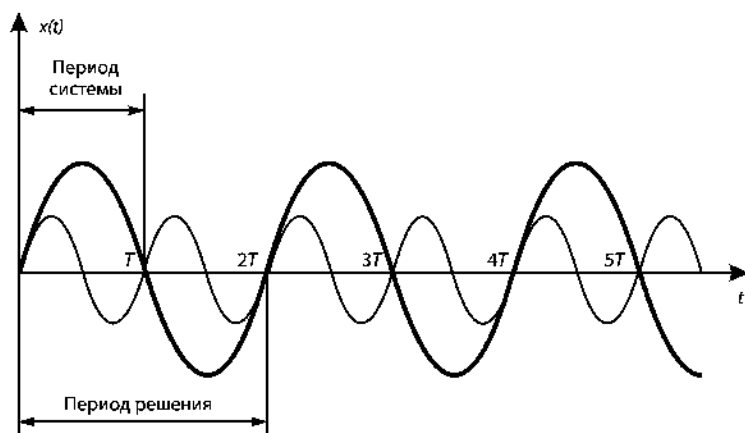


Рис. 2.2.2.1. Графики периодических функций исходной системы и решения

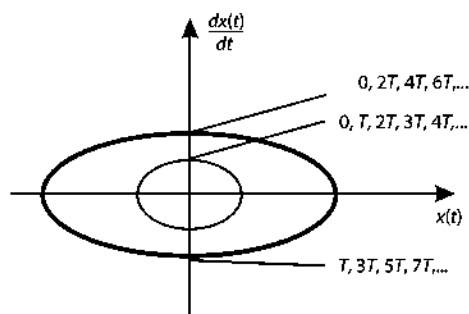


Рис. 2.2.2.2. Фазовый портрет и неподвижные точки

вая точка, называемая стробоскопической, является неподвижной. Если процесс близок к асимптотически устойчивому периодическому процессу, то стробоскопическая точка будет перемещаться по направлению к неподвижной точке устойчивого периодического процесса, где и «остановится». Этот подход может явиться основой для создания компьютерных программ по анализу периодических колебаний и близких к ним.

Однако стробоскопический метод развит значительно дальше. Ведь с его помощью исследование процесса колебаний сводится к анализу эволюции стробоскопической точки. В рамках этого метода исходя из уравнений исходной системы строятся уравнения, описывающие не исследуемое движение, а движение стробоскопической точки. Последние уравнения, как правило, проще исходных. После исследования поведения стробоскопической точки восстанавливаются характеристики движения исходной системы. Стробоскопические уравнения удастся построить, когда исходные дифференциальные уравнения близки к точно интегрируемым, в частности — для некоторых линейных и квазилинейных систем. В случае существенной нелинейности удобно использовать компьютерную реализацию решения задачи Коши.

2.2.3. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Первые фундаментальные результаты анализа периодических решений нелинейных динамических систем были получены в квазилинейной постановке с помощью асимптотических методов. Все нелинейные слагаемые и слагаемые, соответствующие внешним возмущениям, входящие в анализируемую модель, считались малыми по сравнению с линейными компонентами. В дальнейшем появились асимптотические методы, ориентированные на анализ сильно нелинейных систем. При этом система считается сильно нелинейной, если имеется хотя бы одно слагаемое, сопоставимое по величине с линейным, при сохранении предположения малости других слагаемых, входящих в анализируемую систему. Реальные задачи далеко не всегда допускают предположения о малости каких-либо слагаемых уравнений, составляющих математическую модель. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать системы общего вида по отношению к уровню нелинейности — линейные, квазилинейные, существенно нелинейные. Мы не будем вводить принципиальных ограничений на величину ни одного из слагаемых модели.

Проблему построения периодических решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений А. Пуанкаре [2.11] сформулировал следующим образом:

«Пусть

$$dx_i(t)/dt = X_i, i = 1, 2, \dots, n — \quad (2.2.3.1)$$

система дифференциальных уравнений, где X_i — данные, однозначные функции переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Пусть теперь

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_n = \varphi_n(t) — \quad (2.2.3.2)$$

частное решение этой системы. Представим себе, что в момент времени T переменных x_i принимают свои начальные значения, так что $\varphi_i(0) = \varphi_i(T)$. Ясно, что в момент T мы будем находиться в тех же условиях, что и в момент 0, и следовательно, для любого t $\varphi_i(t) = \varphi_i(t + T)$. Другими словами, функции φ_i будут периодическими функциями t . Тогда говорят, что решение (2.2.3.2) является периодическим решением уравнения (2.2.3.1).

Предположим теперь, что функции X_i зависят не только от x_i , но и от времени t . Более того, я предполагаю, что X_i — периодические функции и период равен T . Тогда если функции φ_i таковы, что $\varphi_i(0) = \varphi_i(T)$, то из этого по-прежнему можно заключить, что $\varphi_i(t) = \varphi_i(t + T)$, и решение (2.2.3.2) по-прежнему будет периодическим».

Далее для построения периодических решений А. Пуанкаре предполагает, что «в уравнениях (2.2.3.1) функции X_i зависят от некоторого параметра μ и что в случае $\mu = 0$ удалось проинтегрировать уравнение и установить таким образом существование некоторого числа периодических решений... Выясним, будут ли уравнения (2.2.3.1) допускать решения с периодом 2π , если μ не равно нулю, но очень мало». Таким образом, после постановки задачи А. Пуанкаре вводит понятие малого параметра и использует его для построения периодических решений. Введение малого параметра в общем случае не следует из содержательной постановки задачи; этот параметр служит для построения приближенных решений системы (2.2.3.1).

Заметим, что среди решений (2.2.3.1) следует искать не только T -периодические, но и решения с периодом kT ($k = 1, 2, \dots, <\infty$). Такие решения А. Пуанкаре назвал периодическими решениями второго рода.

Предполагая возможность численного интегрирования систем (2.2.3.1) на отрезке времени $[0, kT]$, мы полностью используем подход А. Пуанкаре, за исключением требования зависимости правых частей системы (2.2.3.1) от малого параметра.

Итак, ставится задача найти такие начальные условия $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \dots, \varphi_n(0)$, при которых в системе (2.2.3.1) реализуется kT -периодическое решение.

Первый вариант постановки задачи: пусть система (2.2.3.1) автономна, т.е. правые части X_i не зависят от t . При этом к числу основных неизвестных (начальные условия $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \dots, \varphi_n(0)$) добавляется еще одна неизвестная величина — период искомого решения T .

Второй вариант постановки задачи: система неавтономна, причем правые части X_i — известные T -периодические функции времени t . Ставится задача отыскания начальных условий, соответствующих kT -периодическим решениям системы.

В обоих вариантах после отыскания начальных условий, соответствующих периодическому решению, само решение строится путем численного решения задачи Коши с найденными начальными условиями на одном периоде. После построения решений ставится задача проверки их устойчивости.

Сначала рассмотрим метод решения задачи в постановке по второму варианту, соответствующему наличию известного периода T правой части и всей модели, т.е. будем считать, что функции X_i в (2.2.3.1) зависят от времени и что

$$X_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = X_i(t + T, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.2.3.3)$$

Здесь T — известный период. Необходимо найти начальные условия $Y_1 = x_1(0), Y_2 = x_2(0), \dots, Y_n = x_n(0)$ и соответствующие им периодические решения системы (2.2.3.1) с периодом $T_k = kT$, проверить их устойчивость.

Эта задача решается по следующему алгоритму: произвольно задаются начальные условия

$$X_i(0) = Y_i \quad (2.2.3.4)$$

и на отрезке $t \in [0, T_k]$ численно решается задача Коши. Очевидно, что для периодических решений выполнялось бы равенство

$$x_i(T_k) = Y_i, i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2.3.5)$$

но в силу произвольности выбора начальных условий полученное на нулевом шаге решение не является периодическим и условие (2.2.3.5) не выполняется.

Введем в рассмотрение функцию

$$F(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n [Y_i - x_i(T_k)]^2}, \quad (2.2.3.6)$$

которая характеризует отличие решения с начальными условиями (2.2.3.4) от периодического. Очевидно, что для начальных условий $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots, \tilde{Y}_n$, соответствующих периодическому решению,

$$F(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots, \tilde{Y}_n) = 0. \quad (2.2.3.7)$$

Для определения начальных условий, соответствующих периодическому решению, имеем нелинейную систему уравнений

$$Y_i - x_i(T_k) = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2.3.8)$$

Основными неизвестными этой системы являются числа $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$. Система (2.2.3.8) не распадается на отдельные уравнения, так как величины $x_i(T_k)$ определяются из исходной нелинейной системы (2.2.3.1) путем численного интегрирования. Для нахождения ее решений можно использовать метод Ньютона. Отметим также, что подобный подход близок к методу точечных отображений.

Будем считать, что с помощью метода Ньютона найдено решение системы (2.2.3.8) и определены начальные условия, соответствующие kT -периодическому решению. После этого на отрезке $[0, kT]$ численно решается задача Коши для системы (2.2.3.1) с найденными начальными условиями. При этом для проверки правильности выбора шага численного интегрирования расчет проводится с вдвое меньшим шагом и вновь проверяется выполнение условий периодичности найденного решения.

В случае когда система автономна, период искомого решения T является неизвестной величиной. Так как начальный момент времени произволен, будем считать что $Y_n = 0$. Тогда для определения начальных условий $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$ и периода решения T имеем систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} Y_i - x_i(T) = 0, i = 1, 2, \dots, n \\ x_n(T) = 0. \end{cases} \quad (2.2.3.9)$$

Решение этой системы нелинейных алгебраических уравнений также может разыскиваться с помощью метода Ньютона. После нахождения начальных условий $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$ и периода решения T численно строится само решение.

Заметим, что вместо численного решения системы нелинейных алгебраических уравнений вида (2.2.3.8) для неавтономных систем или (2.2.3.9) для автономных систем для определения начальных условий, соответствующих периодическому решению, можно численно искать глобальный минимум функции (2.2.3.6). Численные эксперименты показали большую эффективность применения метода Ньютона для решения систем нелинейных алгебраических уравнений, чем численных методов минимизации функции (2.2.3.6).

2.2.4. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Будем считать, что одно из периодических решений системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2.4.1)$$

найдено с достаточной точностью. Перейдем к анализу его устойчивости.

Пусть найдено $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, — одно из kT -периодических решений системы (2.2.4.1). Составим систему в вариациях, соответствующую системе (2.2.4.1). Пусть $\delta\varphi_i$ — малые отклонения от периодического решения, тогда

$$x_i(t) = \varphi_i(t) + \delta\varphi_i(t). \quad (2.2.4.2)$$

Подставим (2.2.4.2) в (2.2.4.1) получим:

$$\frac{d\delta\varphi_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \delta\varphi_j \frac{\partial X_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, t)}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2.4.3)$$

Это линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с kT -периодическими коэффициентами. Она может быть построена аналитически по явно заданным в системе (2.2.4.1) функциям X_i .

По теореме Флоке для линейной системы (2.2.4.3) с kT -периодическим коэффициентом нормирования при $t = 0$ фундаментальная матрица решений имеет вид [2.14]:

$$M(t) = \Phi(t)e^{\Lambda t}, \quad (2.2.4.4)$$

где $\Phi(t)$ — кусочно-гладкая kT -периодическая матрица, причем $\Phi(0) = E$ (E — единичная матрица), и Λ — постоянная матрица. λ_j — решения уравнения $\det(\Lambda - \lambda E) = 0$, т.е. собственные значения матрицы Λ , называют характеристическими показателями системы. Матрица $M(kT)$ называется матрицей монодромии, ее собственные значения ρ_j называются мультипликаторами.

При анализе устойчивости найденного периодического решения неавтономной системы будем пользоваться следующей теоремой Ляпунова: если все характеристические показатели λ_j уравнения в вариациях для данного периодического решения имеют отрицательные вещественные части, то это периодическое решение асимптотически устойчиво при $t \rightarrow \infty$.

Определим действительные части характеристических показателей системы в вариациях (2.2.4.3). Известно, что мультипликаторы

связаны с характеристическими показателями следующими соотношениями:

$$\lambda_j = \frac{1}{kT} \ln \rho_j = \frac{1}{kT} \left[\ln |\rho_j| + i \arg(\rho_j) + 2\pi i \right]. \quad (2.2.4.5)$$

Отсюда получаем:

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) = \frac{\ln |\rho_j|}{kT}$$

и

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, \text{ при } \ln |\rho_j| < 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.2.4.6)$$

Таким образом, найденное периодическое решение будет асимптотически устойчиво, если модули всех его мультипликаторов будут меньше единицы.

Для проверки точности вычисления мультипликаторов можно использовать следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \rho_j &= S_p(M(kT)); \\ \prod_{j=1}^n \rho_j &= \det(M(kT)), \end{aligned} \quad (2.2.4.7)$$

где $S_p(M(kT))$ — сумма диагональных элементов матрицы монодромии.

Для анализа устойчивости автономных систем воспользуемся теоремой Андронова — Витта. Пусть T -периодическое решение $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ автономной системы не сводится к тождественной постоянной, т.е. $\varphi_i(t) \neq 0$ тождественно, причем уравнение в вариациях для этого решения имеют один простой нулевой характеристический показатель, а все остальные характеристические показатели обладают отрицательными действительными частями. Тогда решение $\varphi_i(t)$ устойчиво в смысле Ляпунова при $t \rightarrow \infty$.

При применении этой теоремы следует учитывать тот факт, что если автономная система имеет нетривиальное периодическое решение $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, то для соответствующих уравнений в вариациях, которые представляют собой линейную периодическую систему, по крайней мере один из ее мультипликаторов $\rho = 1$, т.е. по край-

ней мере один из характеристических показателей системы в вариациях

$$\frac{d\delta\varphi_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \delta\varphi_j \frac{\partial X_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2.4.8)$$

является нулевым. При сделанных замечаниях анализ устойчивости периодических решений автономной системы сводится к аналогичной задаче для неавтономной системы с учетом того, что модуль одного из ее мультипликаторов должен быть равен единице.

2.2.5. АЛГОРИТМ АНАЛИЗА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Сложность объекта моделирования, поведение которого описывается периодическими решениями существенно нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, определяет разветвленную структуру алгоритма решений поставленной задачи. Задача может иметь несколько устойчивых и неустойчивых периодических решения при одних и тех же значениях параметров системы, также возможно хаотическое поведение решения существенно нелинейной системы при детерминированных воздействиях, периодические решения могут иметь как простой моногармонический, так и сложный полигармонический вид. При исследовании поведения решений при изменении одного или нескольких параметров системы устойчивые решения могут терять устойчивость, неустойчивые решения могут становиться устойчивыми, в процессе эволюции периодических решений могут зарождаться новые решения с другими периодами. Исходя из этого при программной реализации алгоритма построения периодических решений систем обыкновенных существенно нелинейных дифференциальных уравнений возникает необходимость реализации сценария исследования, допускающего вмешательство пользователя в работу программы, т.е. реализация интерактивного режима работы пользователя. Этот режим исследования позволяет проследивать эволюцию решений при изменении параметров системы, детально анализировать поведение решений в окрестности точек бифуркации, факультативно по запросу пользователя в различной степени использовать или не использовать интерактивные возможности алгоритма.

Современные ЭВМ представляют широкие возможности в области представления результатов моделирования средствами машинной графики и организации интерактивного режима работы. Технические характеристики современных ЭВМ не вносят существенных ограничений в возможность моделирования достаточно сложных систем.

Построенное на основе изложенного выше подхода программное обеспечение может быть использовано для построения решений задач как в линейных и квазилинейных вариантах постановки задачи, так и в случаях существенно нелинейных систем. При этом реализуется поиск периодических решений, определение их устойчивости, вычисление отрезков ряда Фурье заданной пользователем длины для найденного периодического решения. Пользователь имеет возможность в любой момент вмешиваться в ход вычислений и менять параметры системы, тактику поиска решений. На рис. 2.2.5.1 представлена блок-схема алгоритма поиска и построения периодических решений, анализа их устойчивости для моделей, основу которых составляют системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти системы дифференциальных уравнений могут быть линейными,

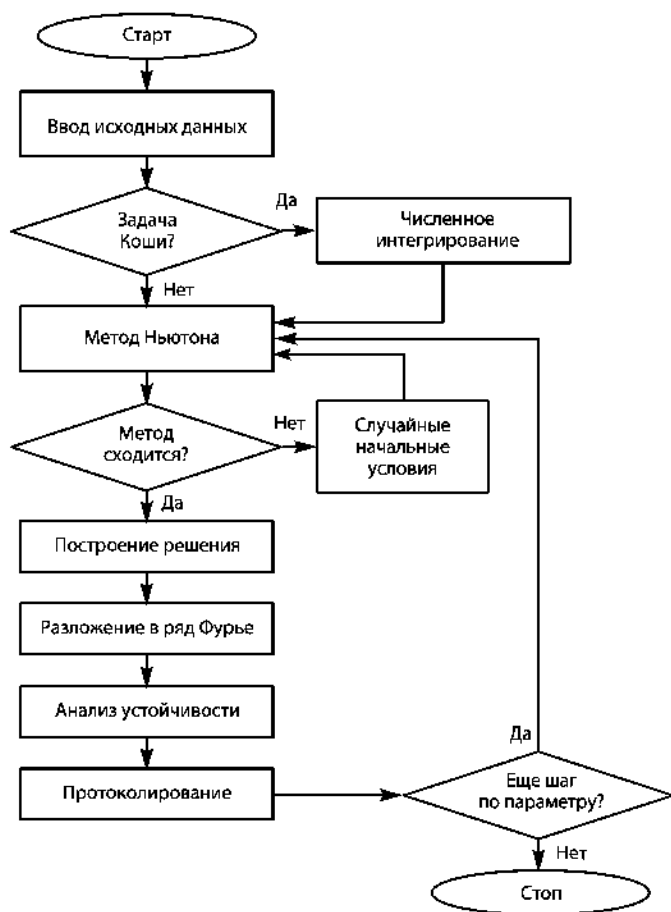


Рис. 2.2.5.1. Блок-схема алгоритма

квазилинейными, существенно нелинейными — алгоритм является общим для этих классов моделей.

После ввода исходных данных алгоритм реализует один из двух возможных сценариев исследования: численное решение задачи Коши на большом временном промежутке или определение начальных условий (метод Ньютона), соответствующих периодическому решению.

Численное решение задачи Коши реализуется с помощью алгоритмов, гарантирующих с помощью выбора шага интегрирования заданную пользователем точность решения. Пользователь следит за текущими результатами моделирования и в случае приближения решения к предельному циклу может переключить алгоритм на поиск периодического решения.

При поиске начальных условий, соответствующих периодическому решению, сходимость метода Ньютона существенным образом зависит от выбора стартового приближения. При неудачном выборе метод может расходиться. В этом случае пользователь может включить возможность выбора стартового приближения с помощью датчика случайных чисел либо задать стартовое приближение вручную. При отсутствии сходимости метода Ньютона, которое отражается в промежуточных результатах расчетов, пользователь может вмешаться в ход вычислений и изменить параметры задачи, точность численных методов, сам задать начальное приближение. Пользователь может также отказаться на некоторое время от использования алгоритма Ньютона и перейти к численному интегрированию, что позволяет либо быстрее найти решение, либо с помощью средств машинной графики анализировать траекторию и фазовый портрет решения и на основании этого сделать выводы о наличии/отсутствии/величине периода и характере решения. Если при численном интегрировании удалось приблизиться к периодическому решению, пользователь при необходимости может вернуться к использованию алгоритма Ньютона и искать периодическое решение, используя найденное с помощью численного интегрирования начальное приближение. Время построения периодического решения в зависимости от вычислительной ситуации и производительности ЭВМ может изменяться от долей секунды до нескольких минут; для быстро строящихся решений в алгоритм специально вводятся временные задержки, для того чтобы пользователь мог оценить промежуточные результаты и принять необходимое решение о дальнейшем сценарии реализации алгоритма. Таким образом, рост производительности ЭВМ привел к необходимости учитывать при реализации алгоритма соотношение между временем построения периодического решения и временем принятия решения квалифицированным пользователем.

После того как найдены начальные условия, соответствующие kT -периодическому решению, само решение строится на одном периоде путем численного решения задачи Коши с найденными начальными условиями.

Далее следует разложение построенного периодического решения в ряд Фурье (факультативно, с определяемым пользователем числом гармоник).

Следующий этап алгоритма — анализ устойчивости полученного решения системы. Для этого n раз решается задача Коши с начальными условиями, образующими столбцы единичной матрицы, и численно строится фундаментальная матрица решений $M(t) = \Phi(t)e^{At}$ системы в вариациях. При этом фиксируется только решение при $t = kT$, т.е. сразу формируется матрица монодромии. После этого определяются мультипликаторы и проверяется выполнение свойств

мультипликаторов $\sum_{j=1}^n \rho_j = S_p(M(kT))$, $\prod_{j=1}^n \rho_j = \det(M(kT))$. При не-

выполнении этих соотношений с заданной точностью пользователю выдается сообщение о необходимости увеличить точность расчетов. При их выполнении с заданной точностью модули найденных мультипликаторов сравниваются с единицей и делается вывод об устойчивости найденного периодического решения.

Алгоритм поиска решения является итерационным и интерактивным, а алгоритм анализа устойчивости — конечным. Для разложения найденного периодического решения в ряд Фурье может быть использована стандартная программа, реализующая конечный алгоритм определения заданного количества коэффициентов ряда Фурье. Для оперативного анализа характера найденного на промежуточном этапе решения, эволюции решений при изменении параметра системы или внешнего воздействия используются средства машинной графики. При этом фазовые портреты и решения строятся на плоскости с помощью средств двумерной машинной графики. Кроме того, возможен анализ решений в трехмерном пространстве. Подчеркнем, что в тройку основных переменных этого трехмерного пространства может входить время. Если модель включает несколько основных переменных, в тройку переменных, отображаемых средствами трехмерной машинной графики, могут входить любые три из основных переменных задачи, включая время. Средства машинной графики включены во многие распространенные математические пакеты, например в *MathCad* [2.18]. Для использования машинной графики, включенной в сторонние пакеты программ, рассматриваемый алгоритм содержит необходимый интерфейс, определяемый используемым пакетом с машинной графикой.

2.2.6. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЙ. ТЕСТОВЫЕ И СРАВНИТЕЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ

Для анализа соответствия полученных результатов заданной точности на различных этапах построения периодического решения и анализа его устойчивости контролируются некоторые параметры, характеризующие точность получаемых результатов.

Для контроля точности определения начальных условий, соответствующих периодическому решению, сами периодические решения строятся численно с шагом вдвое меньшим, чем шаг, который используется при численном решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений при определении начальных условий. После этого вновь проверяется выполнение условия периодичности с заданной заранее точностью. Если это условие нарушается, процедура определения начальных условий повторяется, причем численное интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений проводится с большей точностью. При этом на нулевом шаге в качестве начальных условий берутся найденные ранее значения.

Для контроля точности вычисления мультипликаторов при определении устойчивости найденного решения используются соотношения (2.2.4.7). Если эти условия не выполняются с заданной точностью, то алгоритм возвращается к определению начальных условий и построению решений с большей точностью, так как при определении мультипликаторов используется построенное численно периодическое решение системы. Таким образом, соотношения для мультипликаторов (2.2.4.7) используются для комплексной проверки точности найденного решения и величин мультипликаторов.

При рассмотрении автономных систем для контроля точности используется также условие равенства единице одного из мультипликаторов.

Кроме обсуждения способов проверки точности получаемых начальных условий, периодических решений и величин мультипликаторов, ориентированных на постоянное использование при численной реализации обсуждаемых алгоритмов, целесообразно оценить также точность получаемых решений по тестовым расчетам. При этом могут использоваться задачи, имеющие аналитическое решение; решения, построенные с помощью других приближенных методов; известные результаты исследования существенно нелинейных динамических систем.

В качестве простейших тестовых задач могут быть использованы, например, уравнения вида $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = \sin 3t$ или $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \sin 3t$, аналитические решения которых легко

определить. Повторение точных аналитических решений позволяет определить погрешности, вносимые численным методом. В рамках обычной точности расчетов относительная погрешность не превышает 10^{-5} .

Используя возможность получения периодических решений с достаточно высокой точностью, можно провести сравнение решений квазилинейных задач, получаемых численно и с помощью асимптотических методов. Тем самым будет определена погрешность асимптотического метода и область его применимости в зависимости от требуемой точности. В качестве примера для сравнительных расчетов рассмотрим классическое уравнение Дюффинга:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + x(t) + \delta \frac{dx(t)}{dt} + x^3(t) = W \sin(vt). \quad (2.2.6.1)$$

В справочнике [2.1] приводится решение этого уравнения с помощью асимптотических методов:

$$a^2 \left\{ \left[\left(1 + \frac{3}{8} a^2 \right) - v^2 \right]^2 + \delta^2 \right\} = W^2, \quad (2.2.6.2)$$

где a — амплитуда гармонического решения.

$$x = a \cos(vt + \theta). \quad (2.2.6.3)$$

Для сравнения результатов удобнее выразить из (2.2.6.2) частоту внешнего возмущения v через амплитуду решения a и параметры системы и записать это решение в следующем виде:

$$v = \sqrt{\left(1 + \frac{3}{8} a^2 \right)^2 \pm \sqrt{\frac{W^2}{a^2} - \delta^2}}. \quad (2.2.6.4)$$

Исходя из такой формы записи результатов асимптотического решения методика сравнения может быть следующей: фиксируется частота внешнего возмущения $v = 1$. Численно определяется периодическое решение уравнения (2.2.6.1) с относительной погрешностью, не превышающей 10^{-5} . Определяется амплитуда этого решения, соответствующая верхней устойчивой ветви амплитудно-частотной характеристики при фиксированных двух оставшихся параметрах уравнения (2.2.6.1) — W и δ . После этого по формуле (2.2.6.4) определяется частота v . Отличие этого результата от зафиксированной ранее величины $v = 1$ определяет величину отклонения асимптотического решения от численного. Эта величина позволяет оценить погрешность асимптотического решения.

Анализируя табл. 2.2.6.1, видим, что при малой амплитуде внешнего возмущения $W = 0,1$, при диссипации $\delta = 0.1$ отклонение значения частоты $\nu_{\text{асимптотич}} = 1,005763$, полученного с помощью асимптотических методов, от базового расчетного значения $\nu = 1$ порядка половины процента. Численное решение с той же точностью повторяет решение (2.2.6.3). С ростом внешнего возмущения W и, соответственно, с ростом амплитуды решения (2.2.6.3) a отклонение увеличивается, в получаемом численном решении становятся заметными высшие нечетные гармоники ряда Фурье (что в принципе не учитывается видом асимптотического решения (2.2.6.3)). При $W = 2,5$ получаемое численно решение теряет устойчивость, и при таком наборе параметров в уравнении (2.2.6.1) обнаруживаются принципиально другие несимметричные устойчивые периодические решения. Поэтому сравнительный анализ в диапазоне $W > 2,4$ не имеет смысла.

Таблица 2.2.6.2 содержит данные, показывающие влияние диссипации на точность результатов, получаемых с помощью асимптотических методов. При расчетах зафиксирована амплитуда внешнего возмущения $W = 0,5$. При этом погрешность асимптотического решения порядка 5%. С ростом диссипации погрешность снижается, что объясняется снижением амплитуды решения a .

В табл. 2.2.6.3 приведены результаты аналогичных расчетов при зафиксированной значительной диссипации ($\delta = 1$) при изменяющейся амплитуде внешнего воздействия W . Как и следовало ожидать, при небольших значениях W погрешность невелика, с ростом W погрешность возрастает. Сравнивая результаты, приведенные в табл. 2.2.6.1. и 2.2.6.3, видим, что при $W < 2,4$ погрешность асимптотического решения имеет одинаковый порядок; амплитуды решения (2.2.6.3) также отличаются не принципиально. Однако при большей диссипации решение вида (2.2.6.3) устойчиво при гораздо больших значениях амплитуды внешнего возмущения W . По-видимому, это связано с влиянием высших гармоник, которые имеют одинаковый порядок в обоих случаях, но при большей диссипации гораздо меньше влияют на устойчивость решения. Иначе говоря, с ростом диссипации в большем диапазоне значений других параметров устойчиво решение, качественно близкое к простому моногармоническому решению вида (2.2.6.3).

Используемый численно-аналитический метод исследования периодических процессов применим и к анализу существенно нелинейных систем, включая области бифуркации решений и детерминированного хаоса. При этом в тестовом режиме возможны повторение известных результатов, проведение дополнительных исследований и получение новых данных.

Таблица 2.2.6.1

Зависимость частоты $\nu_{\text{асимптотич}}$ от амплитуды внешнего воздействия W уравнения (2.2.6.1) при параметре диссипации $\delta = 0,1$

a	W	δ	$\nu_{\text{асимптотич}}$
0,491	0,1	0,1	1,005763
0,8847	0,5	0,1	1,056846
0,944	0,6	0,1	1,073475
0,997	0,7	0,1	1,090644
1,046	0,8	0,1	1,109358
1,091	0,9	0,1	1,128316
1,133	1	0,1	1,147853
1,173	1,1	0,1	1,168656
1,2106	1,2	0,1	1,189545
1,2467	1,3	0,1	1,211388
1,2813	1,4	0,1	1,233801
1,3145	1,5	0,1	1,256608
1,3467	1,6	0,1	1,280181
1,3777	1,7	0,1	1,303948
1,4079	1,8	0,1	1,328373
1,4373	1,9	0,1	1,353284
1,4659	2	0,1	1,378521
1,4938	2,1	0,1	1,404117
1,5211	2,2	0,1	1,43013
1,5479	2,3	0,1	1,456633
1,5742	2,4	0,1	1,483529
1,6	2,5	0,1	1,510729

Таблица 2.2.6.2

Зависимость частоты $\nu_{\text{асимптотич}}$ уравнения (2.2.6.1) от параметра диссипации δ при амплитуде внешнего воздействия $W = 0,5$

a	W	δ	$\nu_{\text{асимптотич}}$
0,8848	0,5	0,1	1,056958
0,87057	0,5	0,2	1,053948
0,84649	0,5	0,3	1,049187
0,8123	0,5	0,4	1,043191
0,76818	0,5	0,5	1,036736
0,71547	0,5	0,6	1,030763
0,65746	0,5	0,7	1,026257
0,59885	0,5	0,8	1,023751

Окончание табл. 2.2.6.2

a	W	δ	$\nu_{\text{асимптотич}}$
0,54395	0,5	0,9	1,023386
0,49505	0,5	1	1,024932
0,45261	0,5	1,1	1,028449
0,41608	0,5	1,2	1,034558

Таблица 2.2.6.3

Зависимость частоты $\nu_{\text{асимптотич}}$ от амплитуды внешнего воздействия W уравнения (2.2.6.1) при немалом параметре диссипации $\delta = 1$

a	W	δ	$\nu_{\text{асимптотич}}$
0,1	0,1	1	1,00375
0,2	0,2	1	1,015
0,3	0,3	1	1,03375
0,39889	0,4	1	1,023837
0,49505	0,5	1	1,024932
0,58652	0,6	1	1,029087
0,67161	0,7	1	1,035899
0,7495	0,8	1	1,04521
0,82024	0,9	1	1,05672
0,88442	1	1	1,07005
0,94287	1,1	1	1,084896
0,99645	1,2	1	1,101043
1,0459	1,3	1	1,118266
1,0919	1,4	1	1,136489
1,1348	1,5	1	1,155259
1,1752	1,6	1	1,174797
1,2134	1,7	1	1,194924
1,2498	1,8	1	1,215786
1,2844	1,9	1	1,236882
1,3175	2	1	1,258354
1,3494	2,1	1	1,280422
1,3801	2,2	1	1,302785
1,4097	2,3	1	1,325376
1,4384	2,4	1	1,34836
1,4662	2,5	1	1,371543
1,4933	2,6	1	1,39515
1,5196	2,7	1	1,418833
1,5453	2,8	1	1,442859
1,5704	2,9	1	1,467112

Окончание табл. 2.2.6.3

α	W	δ	$\nu_{\text{асимптотич}}$
1,5949	3	1	1,491486
1,817	4	1	1,745768
2,0111	5	1	2,014332
2,188	6	1	2,29348
2,3527	7	1	2,580253
2,5077	8	1	2,871965
2,654	9	1	3,165349
2,791	10	1	3,454663
2,9164	11	1	3,73032
3,0205	12	1	3,962676

Рассмотрим существенно нелинейный вариант уравнения Дюффинга (2.2.6.1). При конкретных значениях параметров $\delta = 0,2$; $W = 50$ поведение решений детально исследовано в монографии Б.И. Крюкова [2.4]. Отдельные из этих решений используются в качестве тестовых. Кроме того, приводятся результаты, отражающие эволюцию решений при изменении параметров системы.

Рисунки 2.2.6.1 и 2.2.6.2 содержат фазовые портреты и один период решений уравнения (2.2.6.1) при $\nu = 2,5$. Приводятся два разных устойчивых и одно неустойчивое решение. Несимметричные относительно линии $x = 0$ устойчивые и неустойчивые решения уравнения (2.2.6.1) появляются парами (рис. 2.2.6.2). Как правило, мы будем приводить результаты для одного из несимметричных решений, входящих в пару. На рис. 2.2.6.3 собраны различные периодические решения уравнения (2.2.6.1), существующие при одних и тех же параметрах системы. Полученные результаты типичны для нелинейных динамических систем — при одних и тех же значениях параметров существуют различные устойчивые и неустойчивые решения.

Рассмотрим эволюцию решений существенно нелинейного уравнения (2.2.6.1) при возрастании правой части — параметра W при фиксированной частоте ν . Рис. 2.2.6.4 — 2.2.6.9 отражают эволюцию одного из устойчивых решений при возрастании параметра W , соответствующего интенсивности внешнего периодического воздействия. При $W = 80$ решение этого вида становится неустойчивым. При таком же значении параметра $W = 80$ обнаружено другое устойчивое решение кратности 2, которое приведено на рис. 2.2.6.10. При дальнейшем увеличении параметра W это решение эволюционирует и теряет устойчивость (рис. 2.2.6.11 — 2.2.6.12), появляется устойчивое решение кратности 4 (рис. 2.2.6.13). По-прежнему существуют неустойчивые решения кратности 1 (рис. 2.2.6.14). С ростом нелинейности обнаружены

и другие устойчивые и неустойчивые периодические полигармонические решения, например кратности 3 (рис. 2.2.6.15 – 2.2.6.18).

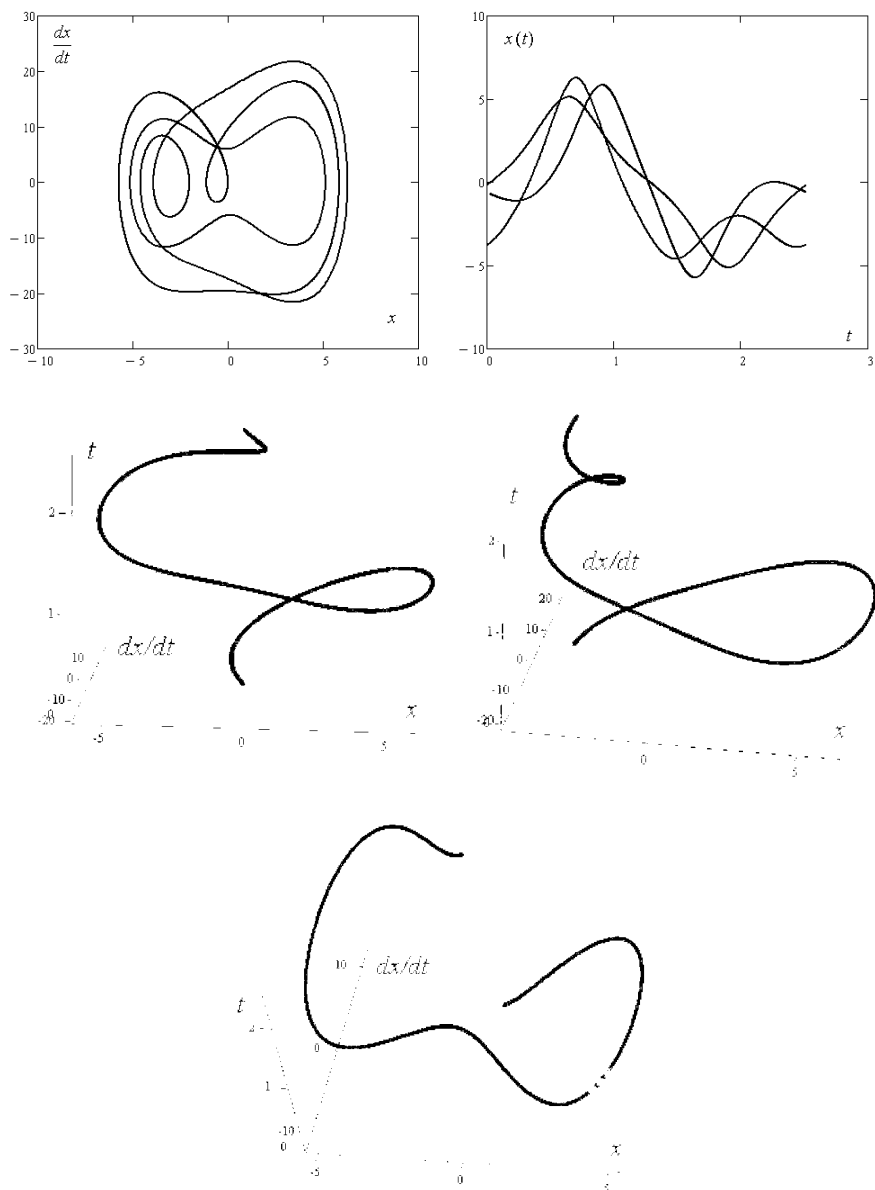


Рис. 2.2.6.1. Фазовые портреты и один период решений уравнения (2.2.6.1) при $\nu = 2,5$, $\delta = 0,2$; $W = 50$. Несимметричные решения устойчивы, симметричное — неустойчиво. В трехмерном пространстве $(x, \frac{dx}{dt}, t)$ для наглядности решения приведены на отдельных графиках

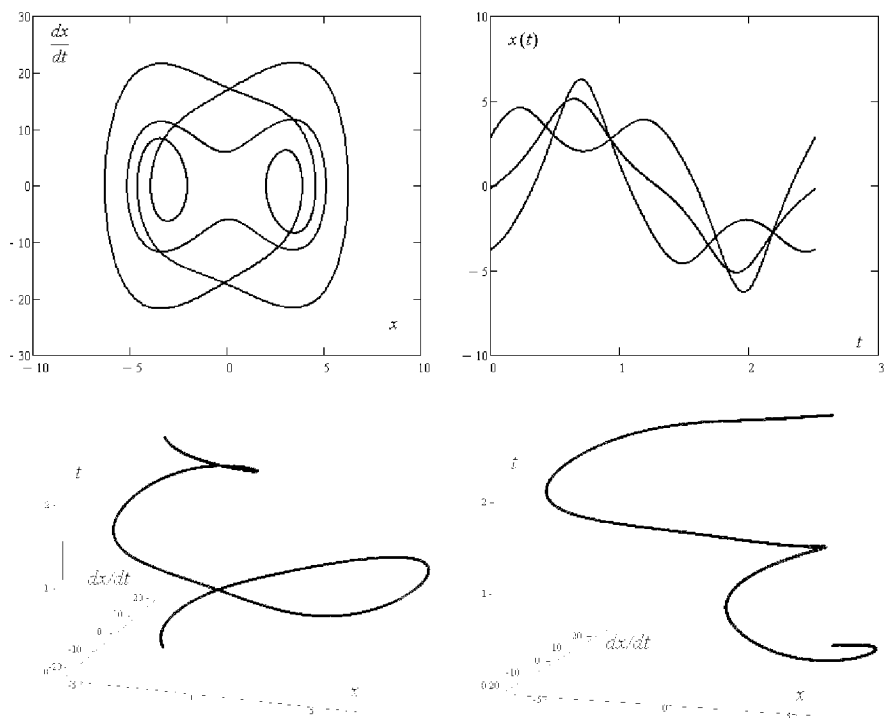


Рис. 2.2.6.2. Фазовый портрет и один период парных устойчивых несимметричных решений и симметричного неустойчивого решения уравнения (2.2.6.1) при $\nu = 2,5$, $\delta = 0,2$; $W = 50$. В трехмерном пространстве $(x, dx/dt, t)$ для наглядности несимметричные парные решения приведены на отдельных графиках

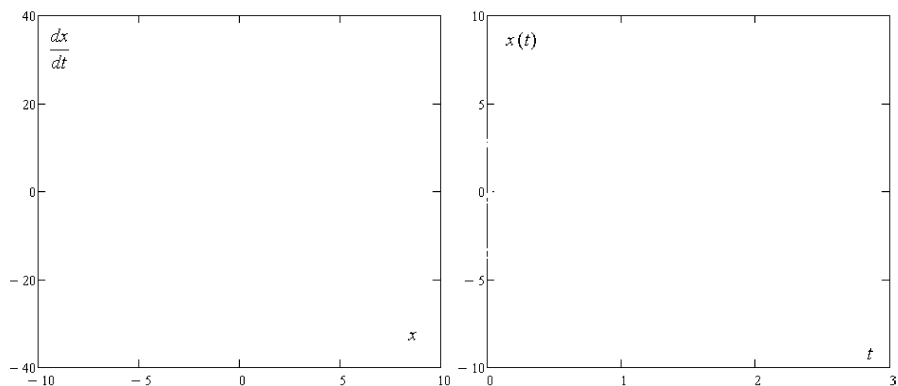


Рис. 2.2.6.3. Фазовые портреты и один период семи различных устойчивых и неустойчивых периодических решений уравнения (2.2.6.1) при одних и тех же параметрах $\nu = 2,5$, $\delta = 0,2$; $W = 50$

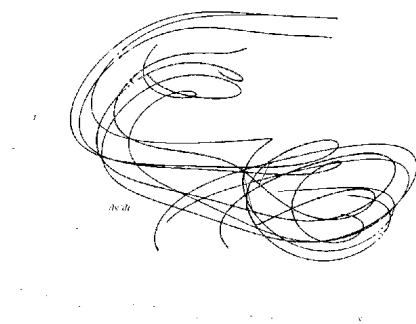


Рис. 2.2.6.3. (окончание)

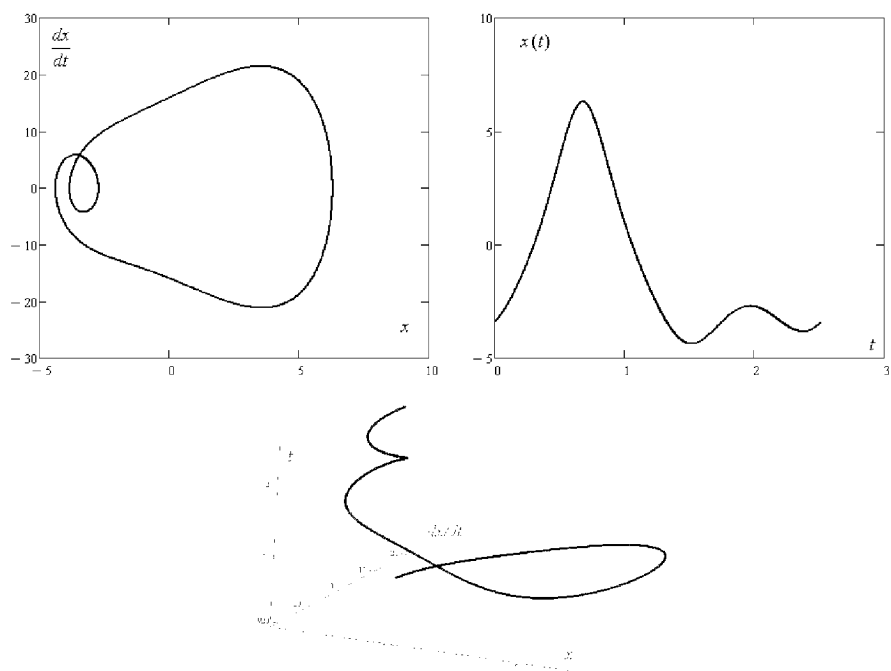


Рис. 2.2.6.4. Фазовый портрет и один период устойчивого решения уравнения (2.2.6.1) при $\nu = 2,5$, $\delta = 0,2$; $W = 55$

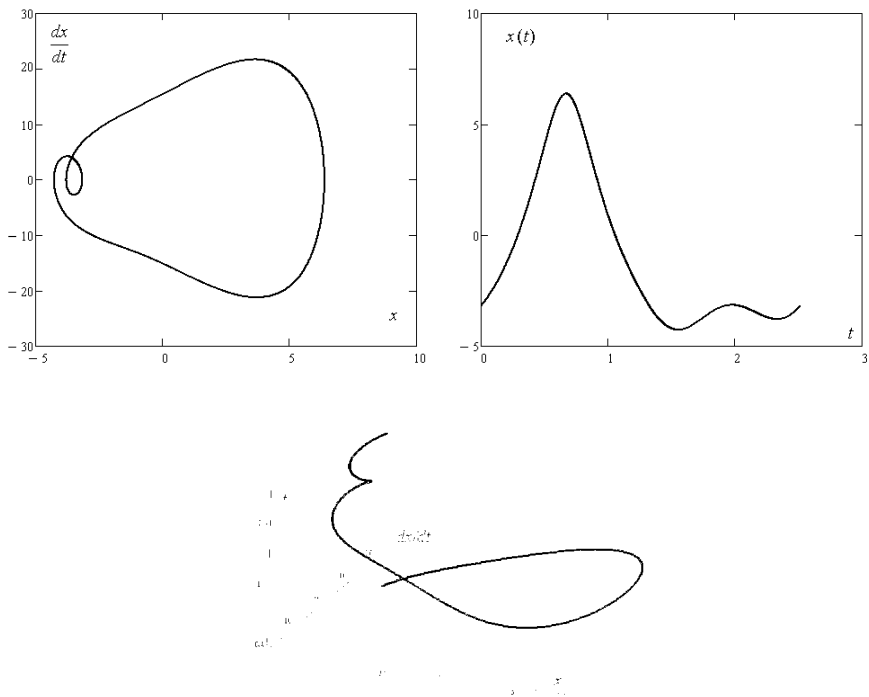


Рис. 2.2.6.5. Фазовый портрет и один период устойчивого решения уравнения (2.2.6.1) при $\nu = 2,5$, $\delta = 0,2$; $W = 60$

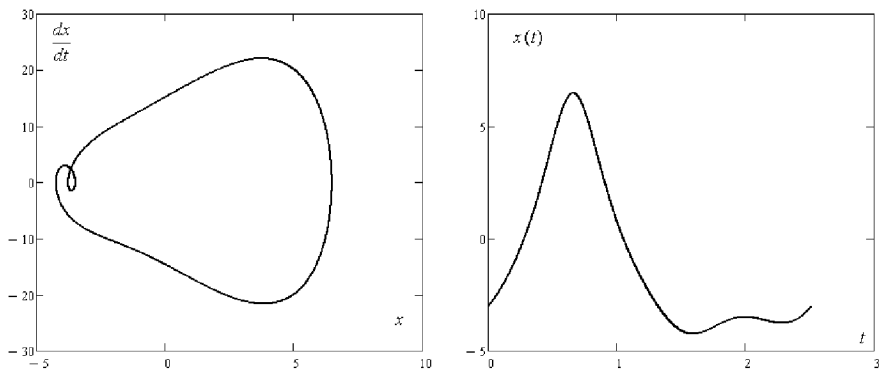


Рис. 2.2.6.6. Фазовый портрет и один период устойчивого решения уравнения (2.2.6.1) при $\nu = 2,5$, $\delta = 0,2$; $W = 65$

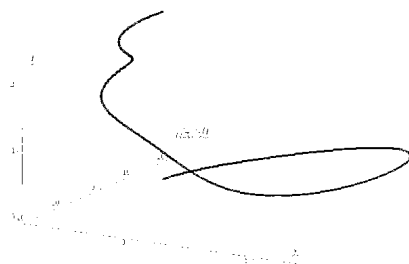


Рис. 2.2.6.6. (окончание)

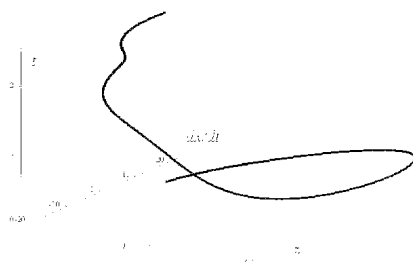
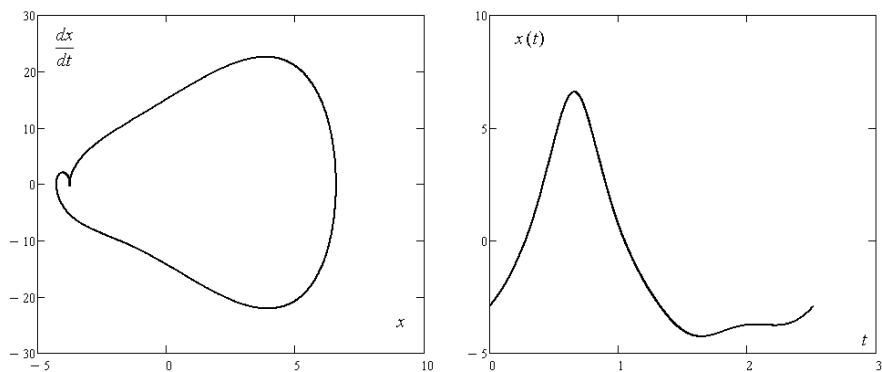


Рис. 2.2.6.7. Фазовый портрет и один период устойчивого решения уравнения (2.2.6.1) при $\nu = 2,5$, $\delta = 0,2$; $W = 70$

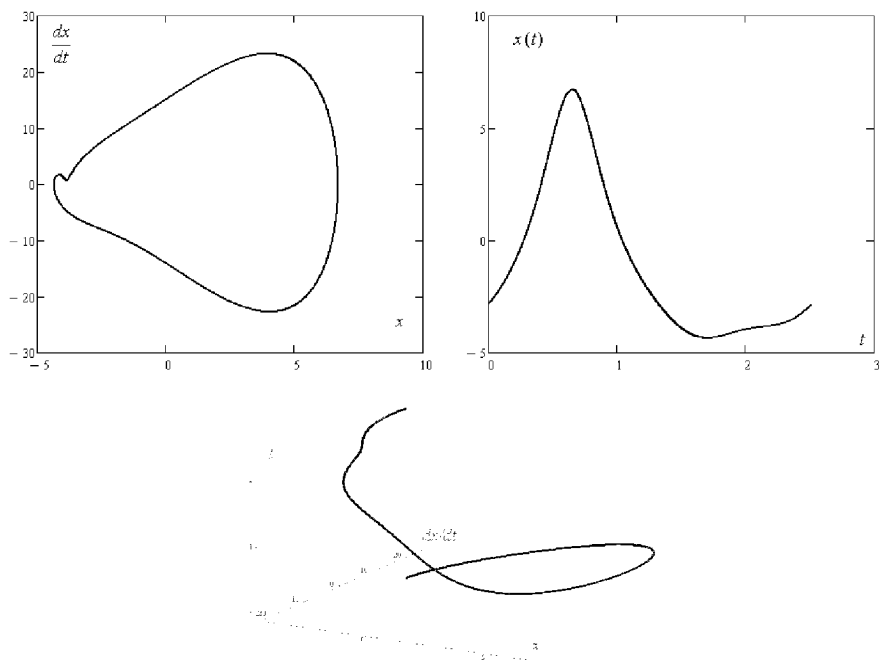


Рис. 2.2.6.8. Фазовый портрет и один период устойчивого решения уравнения (2.2.6.1) при $\nu = 2,5$, $\delta = 0,2$; $W = 75$

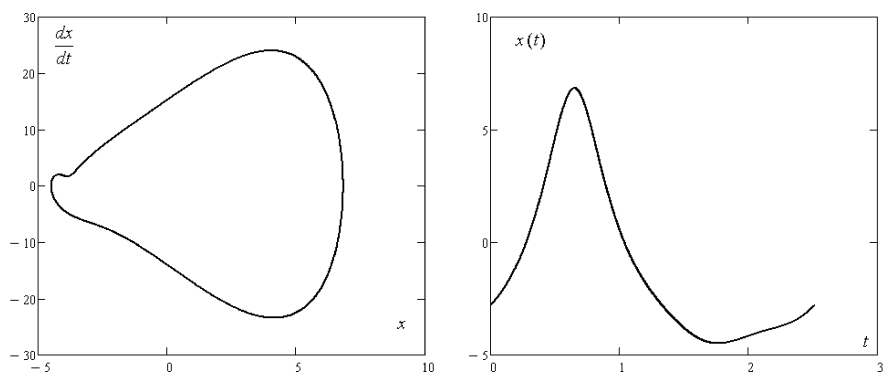


Рис. 2.2.6.9. Фазовый портрет и один период неустойчивого решения уравнения (2.2.6.1) при $\nu = 2,5$, $\delta = 0,2$; $W = 80$

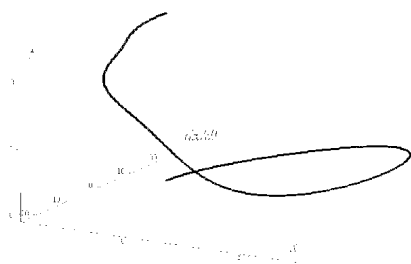


Рис. 2.2.6.9. (окончание)

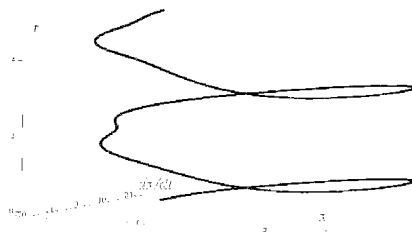
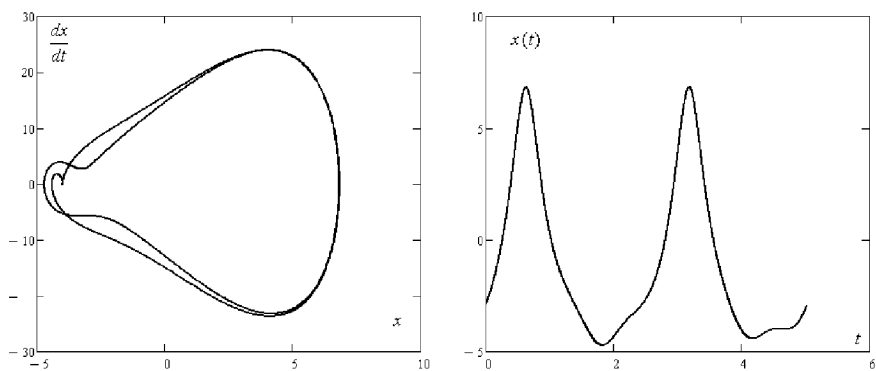


Рис. 2.2.6.10. Фазовый портрет и один период устойчивого решения кратности 2 уравнения (2.2.6.1) при $\nu = 2,5$, $\delta = 0,2$; $W = 80$

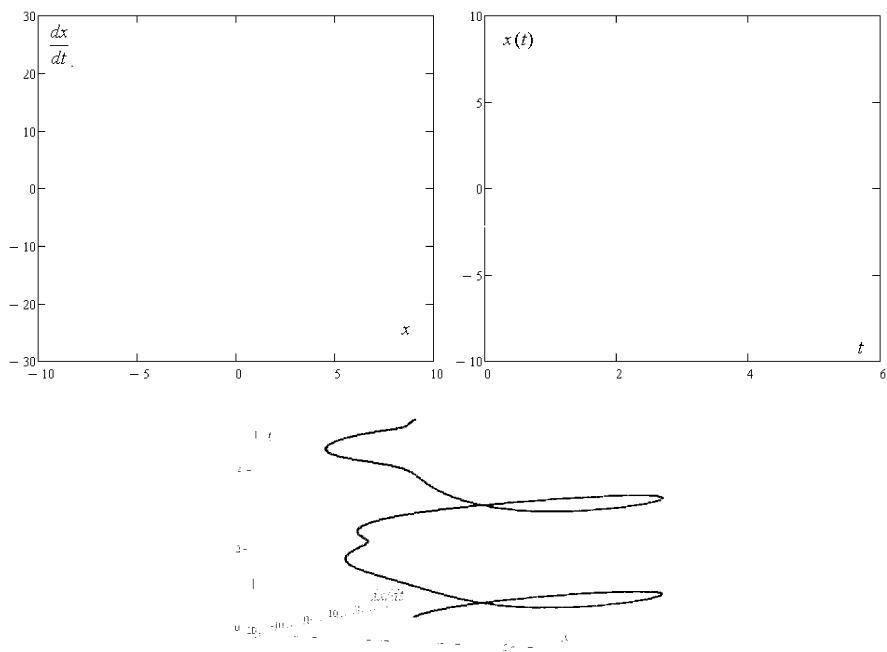


Рис. 2.2.6.11. Фазовый портрет и один период устойчивого решения кратности 2 уравнения (2.2.6.1) при $\nu = 2,5$, $\delta = 0,2$; $W = 85$

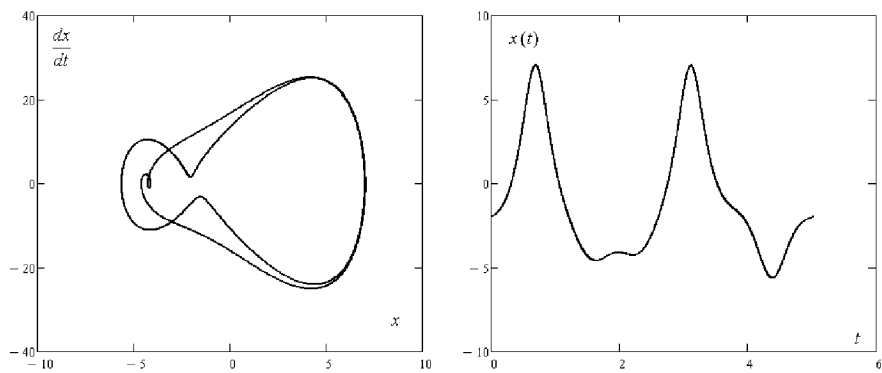


Рис. 2.2.6.12. Фазовый портрет и один период неустойчивого решения кратности 2 уравнения (2.2.6.1) при $\nu = 2,5$, $\delta = 0,2$; $W = 90$

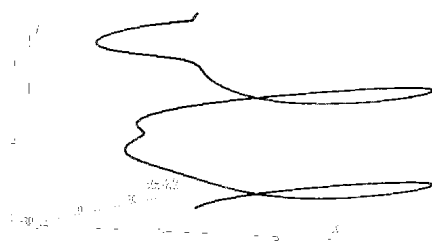


Рис. 2.2.6.12. (окончание)

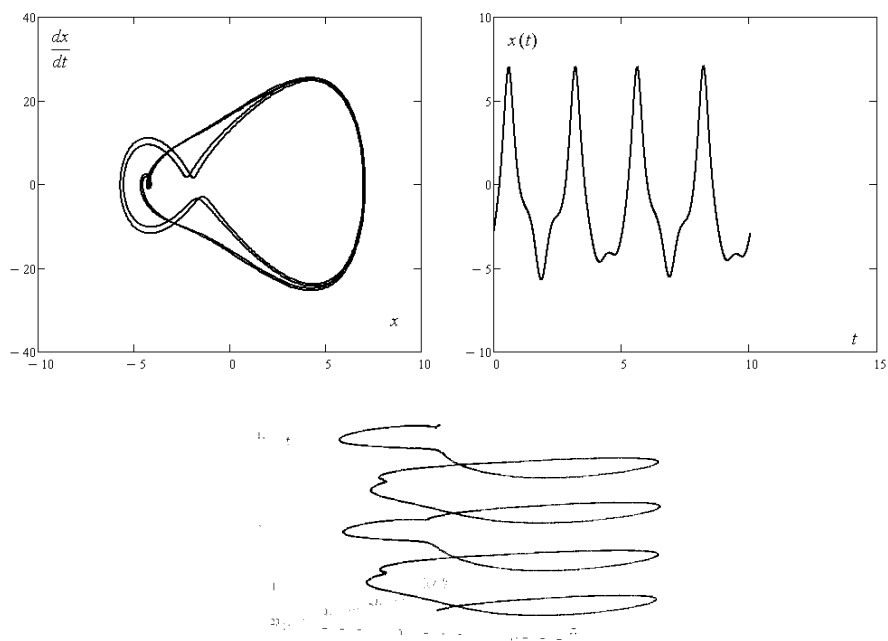


Рис. 2.2.6.13. Фазовый портрет и один период устойчивого решения кратности 4 уравнения (2.2.6.1) при $\nu = 2,5$, $\delta = 0,2$; $W = 90$

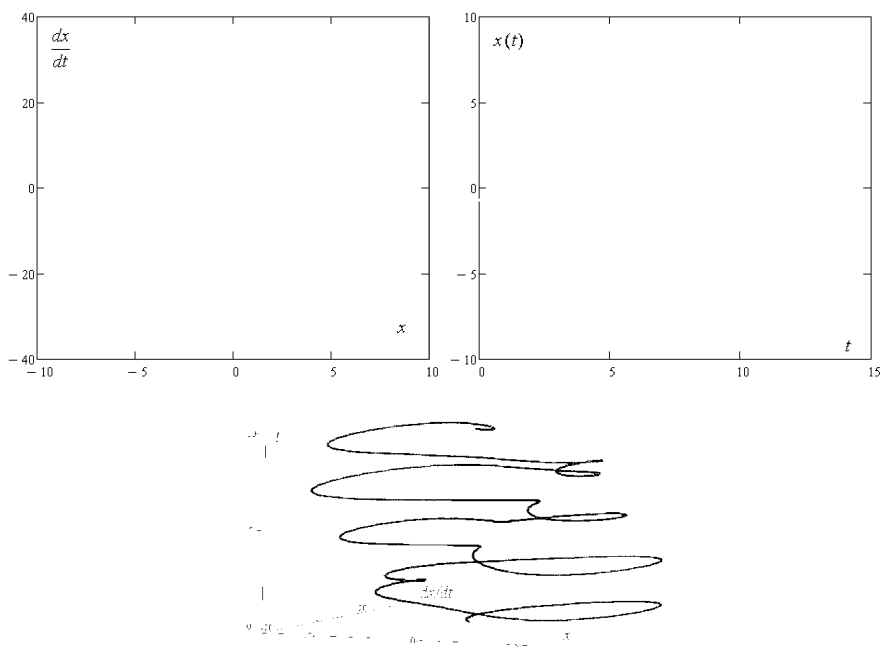


Рис. 2.2.6.14. Фазовый портрет и один период неустойчивого решения кратности 4 уравнения (2.2.6.1) при $\nu = 2,5$, $\delta = 0,2$; $W = 90$

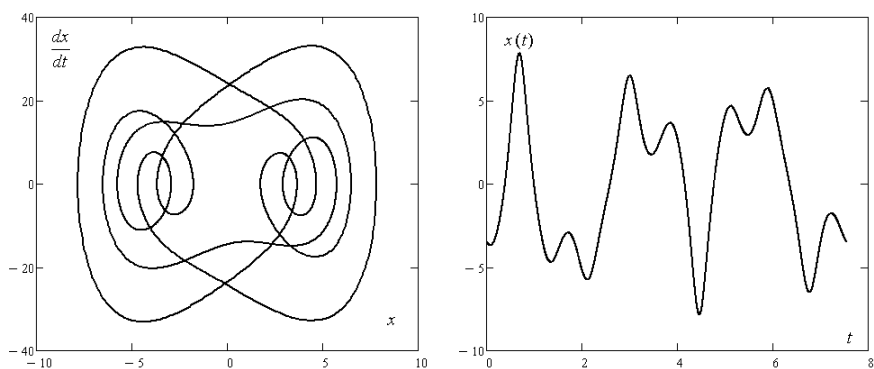


Рис. 2.2.6.15. Фазовый портрет и один период устойчивого решения кратности 3 уравнения (2.2.6.1) при $\nu = 2,5$, $\delta = 0,2$; $W = 99$

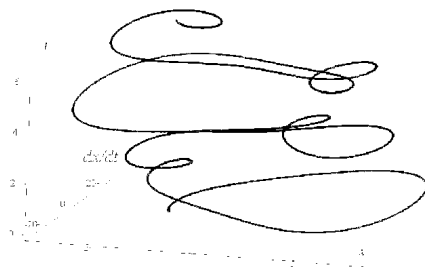


Рис. 2.2.6.15. (окончание)

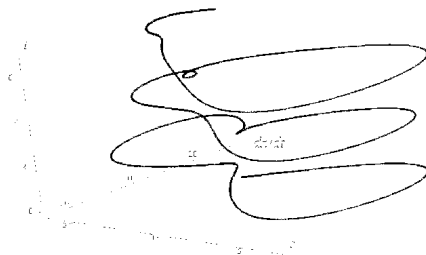
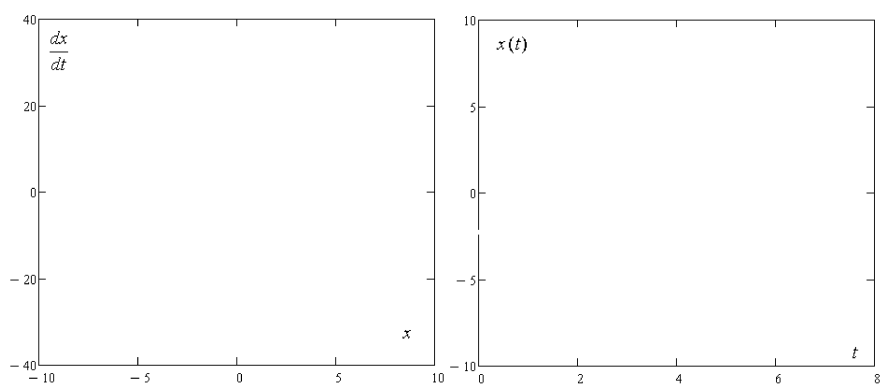


Рис. 2.2.6.16. Фазовый портрет и один период неустойчивого решения кратности 3 уравнения (2.2.6.1) при $\nu = 2,5$, $\delta = 0,2$; $W = 99$

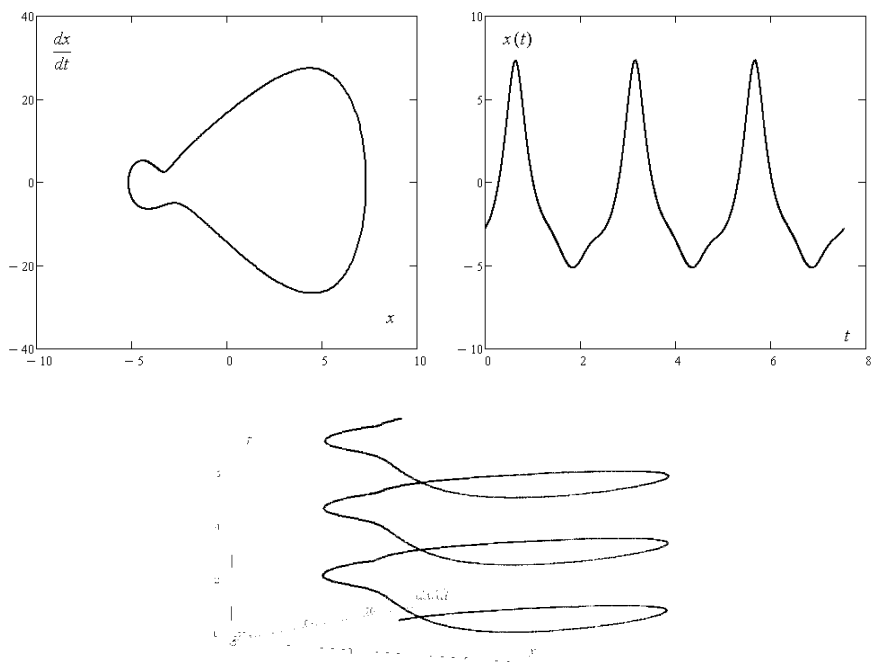


Рис. 2.2.6.17. Фазовый портрет и три периода неустойчивого решения уравнения (2.2.6.1) при $\nu = 2,5$, $\delta = 0,2$; $W = 99$

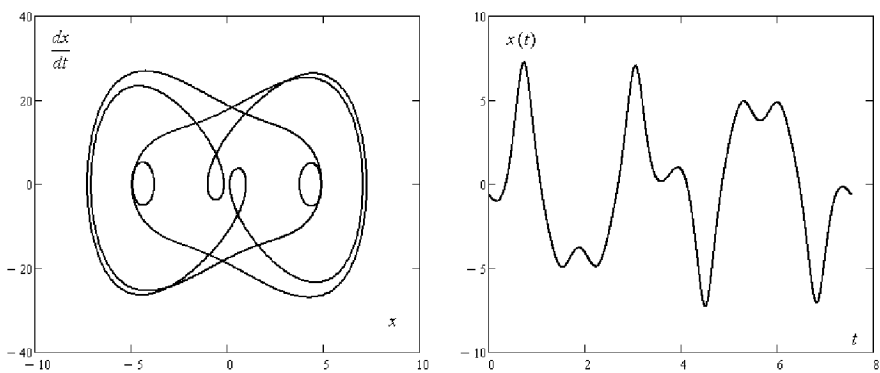


Рис. 2.2.6.18. Фазовый портрет и один период неустойчивого решения кратности 3 уравнения (2.2.6.1) при $\nu = 2,5$, $\delta = 0,2$; $W = 99$

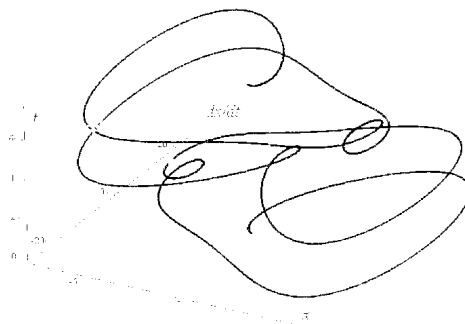


Рис. 2.2.6.18. (окончание)

Результаты применения численно-аналитического метода исследования периодических процессов в зоне странного аттрактора обсуждались в разделе, посвященном рассмотрению существенно нелинейных эффектов в задачах динамики. Были дополнены результаты Холмса [2.15], полученные при исследовании существенно нелинейной модели Дюффинга с отрицательной жесткостью и исследованы бифуркации удвоения периода по Фейгенбауму [2.16].

Таким образом, интерактивный метод построения и анализа устойчивости периодических решений существенно нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет искать и анализировать периодические решения линейных, квазилинейных, существенно нелинейных систем в рамках единого подхода. При этом методика эффективна даже в случаях проявления сложнейших нелинейных эффектов.

ГЛАВА 2.3. ЭФФЕКТЫ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ КАК ПРОЯВЛЕНИЯ ОБЩИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ

В заключение приведем некоторые соображения, показывающие, что «ничто не ново под Луной» и изложенные выше эффекты, модели, методы в той или иной форме и в более общем виде уже встречались в различных разделах науки.

Об экономических циклах и периодических процессах. В предисловии к монографии [2.4] Б.И. Крюков приводит утверждение академика Л.И. Мандельштама о том, что главные открытия в физике, начиная с открытия Коперника, были, по существу, связаны с колебаниями. Там же приводится утверждение английского математика и философа Уайтхеда о том, что рождение физики связано с применением абстрактной идеи периодичности к большому числу отдельных конкретных явлений. Во время издания монографии [2.4] (1984) эти слова автор отнес не только к физике, но и к химии и биологии. Сегодня эти утверждения можно перенести и на экономические процессы.

Рассмотрим проблему адекватности и точности математической модели динамики экономической системы.

Почему для простейших физических моделей получаемые результаты моделирования всегда, даже в случае существенной нелинейности, подтверждаются физическими экспериментами и однозначно повторяются, а модели того же уровня сложности для экономических систем отражают лишь качественные свойства системы и лишь в немногих случаях можно говорить о количественной точности и количественном предсказании? Ответ на этот вопрос очевиден — для простейших физических систем параметры модели с достаточной точностью определяются параметрами физического прототипа; кроме того, при построении модели физических систем можно весьма обоснованно учесть значимые в рамках принятой точности факторы и отбросить малозначимые факторы. Утрируя, можно сказать, что для модели колебаний математического маятника необходимо учитывать притяжение Земли, в рамках требуемой точности обдумать влияние притяжения Луны и совсем не стоит учитывать влияние притяжения дальних планет. При этом все параметры модели определяются с необходимой точностью — длина маятника, масса, ускорение свободного падения на данной высоте, гравитационная постоянная, расстояния между объектами, участвующими в модели.

Для модели экономической системы все гораздо сложнее. Во-первых, функционирование реальной экономической системы далеко не всегда может быть сведено к обозримым математическим моделям. Множественные связи и влияния в реальной экономической системе делают весьма сложной процедуру выделения значимых факторов и отбрасывания малозначимых. Механицизм, синергетика, эконофизика, синергетическая экономика позволяют отразить качественное сходство и схожесть проявляемых эффектов, но далеко не всегда делают возможным достижение количественной точности. Во-вторых, для экономической модели гораздо сложнее определять количественные зависимости и величины параметров модели по данным реального экономического процесса. В отличие от простейшей физической системы экономическая система есть часть социально-экономической среды, и соответственно, гораздо разнообразнее и сложнее зависимости между составляющими модели. Присутствует влияние рекламы, моды, политики, конъюнктуры, интересов отдельных групп. Возможно использование трудно формализуемых внеэкономических факторов типа воздействия на субъекты экономики со стороны отдельных групп влияния, введения внеэкономических ограничений и предпочтений. Итак, при построении динамической модели экономической системы отметим две трудности:

- для сложной системы непросто построить адекватную обозримую математическую модель, отражающую основные исследуемые свойства;
- сложно определить виды зависимостей и, быть может, значения параметров построенной модели.

Рассмотрим еще один аспект построения динамической модели экономической системы — выбор разумной точности моделирования. Если в физических системах исследователь сам может выбрать необходимую точность и в рамках этой точности проводить моделирование, в экономике часто бывают ситуации, когда точность уже определена традициями, требованиями различных органов, причем уровни точности могут отличаться на порядки. Например, минимальная денежная единица в России — 1 коп., а некоторые налоги рассчитываются с точностью до 1 руб. Разница в точности — два порядка. Казалось бы, это не принципиально при использовании компьютеров, но возникают проблемы совсем иного плана. Приведем пример рассогласования в экономической документации при использовании разномасштабных денежных единиц. Пусть учет ведется с точностью до 1 коп., а расчет необходимо сделать с точностью до 1 руб. Вполне реальная следующая ситуация. Наглядности ради учтем обороты по двум для определенности активным счетам:

Счет №	Входящий остаток	Оборот по дебету	Оборот по кредиту	Исходящий остаток
1	1,49	1,0	0	2,49
2	3,49	4,0	0	7,49
Итого	4,98	5,0	0	9,98

Противоречий в этой ведомости нет.

Если теперь провести округление до 1 руб., получим:

Счет №	Входящий остаток	Оборот по дебету	Оборот по кредиту	Исходящий остаток
1	1	1	0	2
2	3	4	0	7
Итого	5	5	0	10

Видно, что нарушилось соответствие в столбцах входящего и исходящего остатков. В более сложной форме это рассогласование проявляется при построении оборотно-сальдовых ведомостей и балансов. Для преодоления этих проблем в балансе выделяются специальные счета, куда переносятся ошибки округления.

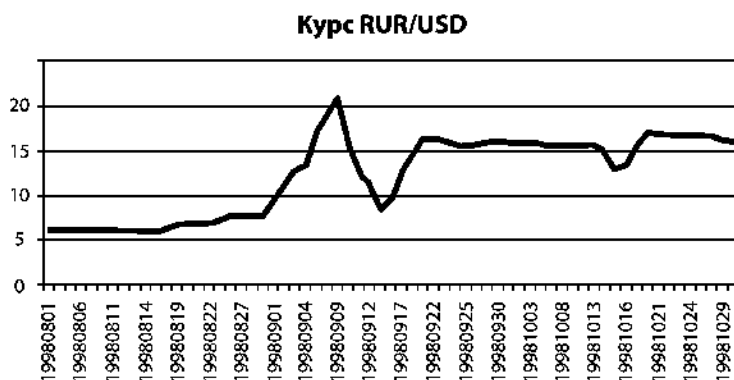
Кредитные организации в соответствии с требованиями ЦБ РФ сдают отчетность, минимальная значащая цифра в которой соответствует 1 тыс. руб. Разница в точности — пять порядков. При этом может возникнуть аналогичное рассогласование в данных. Справедливости ради отметим, что даже если вести учет с точностью до 1 коп., подобные рассогласования возникают при операциях конвертации валют (курсы основных валют учитываются с точностью 4 цифр после запятой). В кредитных организациях для урегулирования возникающего рассогласования используются счета учета курсовой разницы. Аналогичная ситуация может возникнуть и при начислении процентов. Как правило, устанавливаются годовые процентные ставки, а при начислении процентов учитываются дни и, быть может, непостоянная сумма остатка на счете. В результате может получиться число с точностью выше чем 1 коп.

Обратим внимание на еще один аспект различия масштабов при моделировании социально-экономических систем. Естественнонаучные дисциплины оперируют объектами от наномасштабов до космических размеров. Как правило, такая большая разница в характерных размерах в одной модели не встречается, но и реально существующая разница величин может достигать многих порядков. В компьютерах в рамках обычной точности вычислений обычно учитывают порядка 6 значащих цифр, несложно вести расчеты с большей точностью, но при этом увеличиваются вычислительные трудности. Для преодоления этих противоречий в естественнонаучных

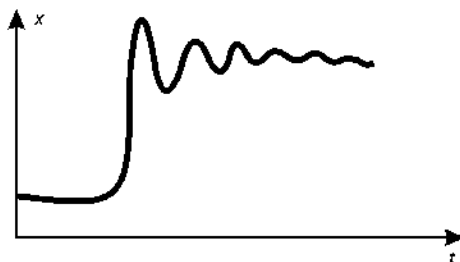
дисциплинах разработаны приемы приведения к безразмерному виду и проведения вычислений в модели к близким масштабам величин [2.17]. Аналогичные приемы можно использовать в моделировании социально-экономических явлений.

Отметим еще одну проблему построения динамических моделей экономики. Время при использовании аппарата дифференциальных уравнений считается непрерывным, а в реальной экономике, как правило, время учитывается с точностью до одного операционного дня (*on-line*-операции рассматривать не будем). Естественно, необходимо учитывать эту особенность.

Например, в период кризиса 1998 г. в России официальный курс рубля по отношению к доллару менялся следующим образом:



Иначе говоря, переход экономики в новое состояние формально произошел по сценарию дискретного времени с шагом 1 день (на шкале абсцисс графика отражены не все даты). Модель этого явления, рассматриваемого с точки зрения теории катастроф, может рассматриваться в непрерывном времени как жесткая потеря устойчивости равновесия докризисного состояния. Характерный график поведения переменной при такой катастрофе имеет такой вид [2.18]:



Кроме того, характерными единицами времени в экономике можно считать месяц и квартал как точки подведения некоторых итогов и год как точку подведения итогов и естественный период, определяющий экономический цикл.

Заметим, что периодичность и характерные периоды — общее свойство существования сложных систем. Например, человек как сложная система — не человечество, а один человек. В нем можно выделить следующие циклы. Цикл, связанный с частотой сердечных сокращений (внутреннее свойство системы, связанное в пределах допустимых изменений пульса с внешними воздействиями, — стресс, физические нагрузки, релаксация и т.п.); цикл с периодом 24 ч, связанный с внешним по отношению к одному человеку периодом обращения Земли вокруг своей оси; лунный цикл; годовой цикл, определяемый климатом и периодической сменяемостью рациона питания (осенью созревает урожай, в свежих продуктах больше витаминов). Это примеры, которые сложно оспорить. Кроме того, некоторые исследователи говорят о наличии эмоционального, физического, интеллектуального циклов человека. И все эти циклы реализуются на фоне естественного развития человека — взросление, период расцвета, старение — в пределах полного жизненного цикла.

Точно так же в экономике и социально-экономических системах есть свои характерные циклы. Наиболее очевидный и естественный цикл — с периодом один год. Этот период определяется условиями функционирования системы. Осенью созревает урожай, снижаются цены на сельхозпродукцию, зимой возрастает расход энергоносителей на отопление и освещение, летом повышается подвижность населения и т.д. Эти процессы повторяются из года в год. Естественно, о точном повторении и периодичности в смысле строгого математического определения периодической функции речь не идет. Этот годовой цикл определен природой. Другие экономические циклы определяются субъективными факторами — датами подведения экономических итогов, периодами массовых отпусков, даже влиянием моды. Например, массовое увлечение горными лыжами и введение продолжительного новогоднего отпуска у большей части населения привели к соответствующим изменениям в экономике туристической отрасли.

Многие из изучаемых в динамическом моделировании эффектов являются проявлениями общих закономерностей развития. Бифуркации, потеря устойчивости при изменении параметра, зарождение новых устойчивых состояний — проявления диалектического закона перехода количественных изменений в качественные. Накопление количественных изменений параметра динамической системы или внешнего воздействия приводит к качественным изменениям в по-

ведении системы, проявляющимся в потере устойчивости прежнего состояния и переходе по тому или иному сценарию к новому состоянию.

Диалектический закон отрицания отрицания предполагает, что развитие осуществляется циклами, каждый из которых состоит из трех стадий: исходное состояние системы, его превращение в свою противоположность (отрицание), превращение этой противоположности в свою противоположность (отрицание отрицания). (С точки зрения динамического моделирования — колебания около положения равновесия.) Форма процесса развития имеет вид спирали: каждый цикл выступает как виток в развитии, а сама спираль — как цепь циклов (колебания с нарастающей или убывающей амплитудой). Действие этого закона полностью обнаруживается лишь в целостном процессе развития. На каждой отдельной стадии закон проявляется как тенденция.

Глобальные макроэкономические процессы неотделимы от процессов социально-экономических. При динамическом моделировании экономических и социально-экономических процессов в полной мере проявляются законы диалектики, закономерности функционирования больших систем, сказывается взаимное влияние социума и экономической системы. Динамическое моделирование позволяет выявить качественные закономерности и тенденции развития, понять и качественно предсказать возможные переходные ситуации, в некоторых случаях дать количественную оценку экономических показателей.

Литература к разделу 2

- 2.1. Вибрации в технике. Справочник в 6 т. Т. 2. Колебания нелинейных систем механических систем / Под ред. И.И. Блехмана. — М.: Машиностроение, 1979.
- 2.2. Корн Г.А., Корн Т.М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1973.
- 2.3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматгиз, 1961.
- 2.4. Крюков Б.И. Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. — М.: Машиностроение, 1984.
- 2.5. Urabe M. Galerkin's procedure for non-linear periodic systems. - *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1965, Vol. 20.
- 2.6. Urabe M. Reiter A. Numerical computation on non-linear forced oscillation by Galerkin's procedure. — *J. Math. Anal., appl.*, 1966, 14.
- 2.7. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969.

- 2.8. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. — М.: Мир, 1985.
- 2.9. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. — М.: Мир, 1983.
- 2.10. Пуанкаре А. Избранные труды в 3 т. Т. 1. Новые методы небесной механики. — М.: Наука, 1971.
- 2.11. Андронов Л.А., Витт А.А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981. (1-е изд. 1937 г.).
- 2.12. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1972.
- 2.13. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
- 2.14. Holmes P.J. *A nonlinear oscillator with a strange attractor. - Philosophical Transaction of the Royal Society. London. Vol. 292, P. 419-448.*
- 2.15. Feigenbaum M.J. *Universal behaviour in nonlinear systems. — Los Alamos Sci., 1980. Vol. 1.*
- 2.16. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1981.
- 2.17. Арнольд В.И. Теория катастроф. — М.: Едиториал УРСС, 2007.
- 2.18. Кирьянов Д.В. Самоучитель *Mathcad 12*. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004.

По вопросам приобретения книг обращайтесь:

Отдел продаж «ИНФРА-М» (оптовая продажа):
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31в, тел.: (495) 380-4260; факс: (495) 363-9212
E-mail: books@infra-m.ru

Отдел «Книга—почтой»:
тел. (495) 363-4260 (доб. 232, 246)

Центр комплектования библиотек:
119019, Москва, ул. Моховая, д. 16 (Российская государственная библиотека, кор. К)
тел. (495) 695-9315

Учебное издание

Лев Федорович Петров

МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЭКОНОМИКИ

Учебное пособие

Оригинал-макет подготовлен в «Издательстве ИНФРА-М»

Подписано в печать 25.01.2010.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Newton.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 15,0. Уч.-изд. л. 16,29.
Тираж 500 экз. Заказ №

Издательский Дом «ИНФРА-М»
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31в
Тел.: (495) 380-05-40, 380-05-43. Факс: (495) 363-92-12
E-mail: books@infra-m.ru
<http://www.infra-m.ru>